

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT
DE BILT

VERSLAGEN

V-212

Spectraalanalyse van tijdreeksen
(tevens verslag van een colloquium,
gehouden op 21 november 1967.)

door

J. van Galen

De Bilt, 1968

Publikationsnummer: K.N.M.I. V-212-VI

I N H O U D

1. Inleiding
2. Stochastische processen, ergodiciteit
3. Het spectrum
4. Het Wiener-Khinchin theorema
5. Invloed apparatuur. Frequentie-responsie
6. Invloed eindige registratielengte: "uitsmering"
7. Invloed discrete analyse: "aliasing"
8. Invloed toevalseffecten: variabiliteit van de spectraalschattingen
9. Kernen en vensters
10. Filters
11. Interpretatie van het spectrum
12. Voordelen van spectraalanalyse
13. Slotopmerkingen
14. Literatuur

Spectraalanalyse van tijdreeksen

1. Inleiding

Spectraalanalyse, zoals hier bedoeld, is een vorm van statistisch onderzoek. Onderzocht wordt hoe van fluctuerende systemen de samenstellende afzonderlijke sinustrillingen, gerangschikt naar de frequentie, bijdragen tot het totale vermogen ofwel de variantie van het systeem. Dit wordt vastgelegd in het vermogenspectrum (power spectrum), ook variantiespectrum, intensiteitsspectrum, energiedichtheidsspectrum of spectrale dichtheid (SPD) genoemd.

Niet het verschijnsel zelf wordt onderzocht, maar een registratie. Deze kan continu zijn ("strook", "trace") of discreet ("data", "tijdreeks"). Misschien samenhangend met het feit dat voor bewerking door een digitale rekenmachine een eventuele continue registratie moet worden gedigitaliseerd - en dus gediscretiseerd - is het spraakgebruik volgens hetwelk iedere registratie, continu of discreet, een "tijdreeks" wordt genoemd.

Wijze van registreren, eindigheid van de registratielengte en discretisering brengen zekere vervormingen in het spectrum teweeg. Hoewel de berekening van een spectrum een simpel procédé is, veroorzaken toevalseffecten in combinatie met zojuist genoemde factoren diverse moeilijkheden in voorarbeid en interpretatie.

2. Stochastische processen, ergodiciteit

Een waargenomen tijdreeks is meestal niet de enig mogelijke welke door het systeem kan worden gegenereerd. Het fluctuerend systeem wordt dan aangeduid als een stochastisch proces of ensemble, d.w.z. een "functie-populatie" $X(t)$ waaruit de tijdreeks als een toevallige realisatie of "steekproef-functie" $X(t)$ tevoorschijn komt. Het ensemble is statistisch karakteriseerbaar door eerste, tweede momenten enz., welke een functie van de tijd zijn!

Menig proces is gaussisch. Dit houdt in dat voor iedere n en voor iedere keuzen van tijdstippen t_1, t_2, \dots, t_n de waarden $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ verdeeld zijn volgens een n -dimensionale normale verdeling. Is bovendien op ieder tijdstip het ensemble-gemiddelde gelijk aan nul — symbolisch genoteerd als $\xi \{ X(t) \} \equiv 0$ —, dan is, zoals bekend, de waarschijnlijkheidsstructuur van het ensemble volledig bepaald door de covariantiematrix $|C_{i,j}|$, gedefiniëerd door

$$C(t_i, t_j) = \xi \{ X(t_i) X(t_j) \} \quad (1)$$

Indien het proces ook stationair is, d.w.z. dat translaties langs de tijd-as de statistische eigenschappen onveranderd laten, dan kan het proces volledig statistisch worden beschreven door de volgende covariantiefunctie

$$C(t_i, t_j) = C(t_j - t_i) = C(\tau) = \xi \{ \underline{X}(t) \underline{X}(t + \tau) \} \quad (2)$$

Hierin is $\tau \equiv t_j - t_i$ de "time-lag". Voor $\tau = 0$ komt er

$$C(0) = \xi \{ [\underline{X}(t)]^2 \} = \text{de variantie}(\sigma^2) \quad (2A)$$

De mogelijk om, waar we niet de beschikking hebben over het ensemble, de statistische eigenschappen af te leiden uit een realisatie, berust op het principe van de ergodiciteit. Een proces heet ergodisch wanneer ensemblegemiddelden mogen worden vervangen door de overeenkomstige tijdgemiddelden over één enkele realisatie. Voor de meeste processen is het principe van de ergodiciteit wel vervuld. Dan nog kan op zijn best een schatting van het spectrum worden verkregen, o.m. omdat het registratie-interval een eindige lengte heeft.

We beperken ons tot processen die ergodisch, stationair en gaussisch zijn met gemiddelde nul. Bij berekening over één realisatie is het substitueert voor de covariantiefunctie de zogeheten auto-covariantiefunctie (ACF). De ACF bevat alle informatie omtrent de waarschijnlijkheidsstructuur van het proces. Verderop komt ter sprake dat de SPD wezenlijk dezelfde informatie bevat als de ACF; alleen anders, en voor verschillende doeleinden efficiënter, geformuleerd.

Spectraalanalyse kan daarom nu worden omschreven als de methode van het schatten, uit een enkele registratie — en dan nog van eindige lengte —, van de spectraal geformuleerde statistische eigenschappen van een ergodisch, stationair, gaussisch ensemble met gemiddelde nul.

3. Het spectrum

Voor het geval dat de continue functie $X(t)$ periodiek is op $\langle -\frac{T}{2}, +\frac{T}{2} \rangle$ geldt volgens de klassieke harmonische analyse de Fourierreeks-ontwikkeling:

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi f_k t}, \\ C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i2\pi f_k t} dt, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

waarin

met

$$f_k = \frac{k}{T}$$

De amplituden C_k zijn complex, d.w.z. ze bevatten tevens de fase-informatie.

Stellen we nu $\Delta f = \frac{1}{T}$, $A(f_k) = C_k T$, $P(f_k) = \frac{|A(f_k)|^2}{T}$ en herschrijven we (3) als

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(f_k) e^{i2\pi f_k t} \Delta f, \\ A(f_k) &= \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i2\pi f_k t} dt, \end{aligned} \right\} \quad (3A)$$

dan zien we voor $T \rightarrow \infty$, d.w.z. voor $X(t)$ niet-periodiek, dat de Fourierreeks-ontwikkeling formeel overgaat in de zogenaamde Fourier-integraal-representatie:

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(f) e^{i2\pi ft} df, \\ A(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i2\pi ft} dt, \end{aligned} \right\} \quad (3B)$$

$X(t)$ en $A(f)$ worden elkaars Fourier-getransformeerden genoemd. Notatie: $X(t) \rightleftharpoons A(f)$.

Uit de electriciteitsleer is bekend dat, indien $X(t)$ een periodiek fluctuerend voltage is, $\sum /C_k/2$ het per cyclus gemiddelde stroomvermogen voorstelt, uitgedrukt in Watts, dat gedissipeerd wordt in een zuivere weerstand van 1Ω .

Er geldt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} /C_k/2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{/A(f_k)/2}{T} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df.$$

$P(f)$ nu is het spectrum. Aangezien $\int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$ kennelijk een vermogen voorstelt, moet $P(f)$ zelf een vermogensdichtheid representeren. Vandaar de benaming vermogensspectrum of spectrale dichtheid.

4. Het Wiener-Khinchin theorema

Spil waarom de spectraalanalyse draait is het Wiener-Khinchin theorema dat zegt:

$$C(\tau) \rightleftharpoons P(f), \quad (4)$$

met andere woorden, de ACF en de SPD zijn elkaars Fourier-getransformeerden. Door deze 1-1-correspondentie ligt alle informatie die de ene functie bevat tevens in de andere besloten. Het zijn in principe gelijkwaardige beschrijvingsschema's, die elkaar nochtans beconcurreren vanuit verschillende aanschouwelijkheidsdomeinen: het tijd-domein en het frequentie-domein. Het is als met "golven" en "deeltjes". Voor sommige doeleinden is het ene schema te prefereren, voor andere doeleinden moet men aan de antipode de voorkeur geven.

Vanwege het feit dat $C(\tau)$ en $P(f)$ beide even functies zijn (d.w.z. $C(\tau) = C(-\tau)$ en $P(f) = P(-f)$), is (4) te schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} P(f) &= 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \\ C(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos 2\pi f \tau df. \end{aligned} \right\} \quad (4A)$$

Voor $\tau = 0$ gaat de laatste relatie over in

$$C(0) = \sigma^2 = \int_0^{\infty} 2P(f) df.$$

Dit maakt duidelijk waarom $P(f)$ — of, indien alleen positieve frequenties worden beschouwd, $2P(f)$ — ook variantiespectrum wordt genoemd. Veelal beschouwt men het genormeerde variantiespectrum

$$\frac{P(f)}{\sigma^2} \iff \frac{C(\tau)}{C(0)} \equiv R(\tau)$$

waarin $R(\tau)$ de autocorrelatiefunctie is.

De SPD schijnt moeilijk rechtstreeks te berekenen te zijn via (3A) en $P(f_k) = \frac{A(f_k)^2}{T}$, maar het theorema (4) opent de mogelijkheid dit via de ACF te doen. In de praktijk doet men het dan ook zo (tot nu toe).

Achtereenvolgens bespreken we hierna de invloed op het spectrum van: de registratieapparatuur, de eindigheid van het registratie-interval, de discreetheid van de registratie of althans van de analyse, en de invloed van toevalseffecten.

5. Invloed apparatuur. Frequentie-responsie

Laat een meetapparaat de realisatie $X(t)$ als input krijgen en als output geven de registratie $Y(t)$. Het is bekend dat geen apparaat gelijkelijk sensitief is voor alle frequenties, zodat $Y(t) \neq X(t)$. De mate van vervorming hangt

af van de eigenschappen van het apparaat. In een zg. lineair circuit of netwerk (electrotechniek) is de vervorming te bepalen door middel van de "karakteristieke functie" of "impulsresponsie" $h(t)$, dat is de output

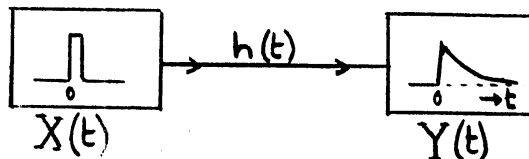


fig. 1

bij een eenheidsimpuls als input (fig. 1). Een eenheidsimpuls is mathematisch weer te geven door een Dirac-functie of delta-functie

$\delta(t)$, het limietgeval voor $\epsilon \rightarrow 0$ is afgebeeld in fig. 2.

Door nu $X(t)$ opgebouwd te denken uit een zeer groot aantal eenheidsimpulsen vinden we

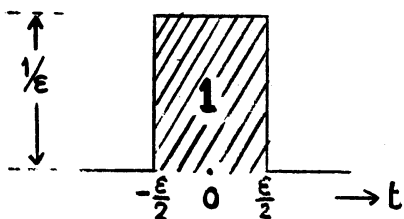


fig. 2

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (5)$$

Deze integraal-operatie wordt convolutie genoemd.

Verkorte, gebruikelijke notatie:

$$Y(t) = X(t) * h(t) \quad (5A)$$

Zijn de Fourier-getransformeerden van $X(t)$, $Y(t)$ en $h(t)$ respectievelijk $U(f)$, $V(f)$ en $H(f)$, dan kan worden bewezen (zie bijvoorbeeld Blackman and Tukey, 1958) dat

$$V(f) = U(f) \cdot H(f) \quad (6)$$

De betrekking (6) werkt prettiger dan (5) omdat het vermenigvuldigen van twee functies eenvoudiger en minder tijdrovend is dan het voor iedere waarde van t uitrekenen van een convolutie-integraal. Vandaar dat apparaten bij voorkeur worden gekarakteriseerd door $H(f)$, de frequentie-responsie, en niet door de impuls-responsie $h(t)$. Correctie van het spectrum voor vervorming door de meetapparatuur blijkt mogelijk te zijn door middel van vermenigvuldiging van het vervormde spectrum met $/H(f)/^{-2}$.

6. Invloed eindige registratielengte: "uitsmering"

Registratie van de (oneindig lange) realisatie $X(t)$ op het eindige interval $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$ komt hierop neer dat $X(t)$, evenals $C(\tau)$, wordt vermenigvuldigd met de "blokfunctie" $D_T(t)$, gedefiniëerd door

$$D_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{voor } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Er geldt

$$D_T(t) \iff Q_T(f)$$

met

$$Q_T(f) = T \cdot \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

Stellen we het geschatte spectrum voor door $P_T(f)$ en laat het ware spectrum $P(f) = P_\infty(f)$ zijn. Dan geldt:

$$C_T(\tau) \equiv C(\tau) \cdot D_T(\tau) \iff P_T(f) \equiv P(f) * Q_T(f).$$

Voor de laatste convolutie kunnen we voluit schrijven:

$$P_T(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f_0 - f) Q_T(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) Q_T(f_0 - f) df$$

Dit laat zien dat de convolutie $P(f) * Q_T(f)$ in feite betekent dat de spectraalschatting voor de frequentie f_0 , $P_T(f_0)$, een gewogen gemiddelde is van $P(f)$ over frequenties in de buurt van f_0 met gewichtsfunctie $Q_T(f_0 - f)$. De "ware" spectrale dichtheden zijn dus "uitgesmeerd". $P_T(f)$ is dus een "gladgestreken" versie van $P(f)$.

7. Invloed discrete analyse: "aliasing"

Het discreet registreren met equidistante tijdsintervallen Δt betekent vermenigvuldiging van $X(t)$, en daarmee van $C(\tau)$, met een "kam" van Dirac-functies met "tandwijdte" Δt . Gevolg is dat $P(f)$ geconvolveerd wordt met de Fourier-getransformeerde van deze Dirac-kam: eveneens een Dirac-kam, in het frequentiegebied, met tandwijdte $\frac{1}{\Delta t}$. Weging van $P(f)$ over alle frequenties met deze functie als gewichtsfunctie betekent dat het spectrum gecopiëerd wordt verschoven over alle gehele veelvouden van $\frac{1}{\Delta t}$, waarbij overlappende delen worden gesommeerd. Het is dan slechts zinvol om het spectrum te beschouwen

op bijvoorbeeld het interval $\langle -\frac{1}{2\Delta t}, +\frac{1}{2\Delta t} \rangle$, en zelfs, omdat $P(f) = P(-f)$, op $\langle 0, \frac{1}{2\Delta t} \rangle$. Alle overige intervallen $\langle \frac{k}{2\Delta t}, \frac{k+1}{2\Delta t} \rangle$ (k geheel en $\neq 0$) bevatten slechts copieën van dit "hoofddeel". Het is alsof het gehele spectrum wordt opgevouwen om de veelvouden van $\frac{k}{2\Delta t}$ tot alles op $\langle 0, \frac{1}{2\Delta t} \rangle$ ligt. Men noemt dan ook $f = \frac{1}{2\Delta t}$ de "vouwfrequentie" of Nyquistfrequentie f_N . Dit effect, dat frequenties zich voordoen als andere frequenties, wordt "aliasing" genoemd: iets dergelijks treedt op in

een stroboscoop waar snel roterende wielen langzaam schijnen te wentelen. Energie boven de Nyquistfrequentie vervormt het spectrum beneden de Nyquistfrequentie (fig. 3).

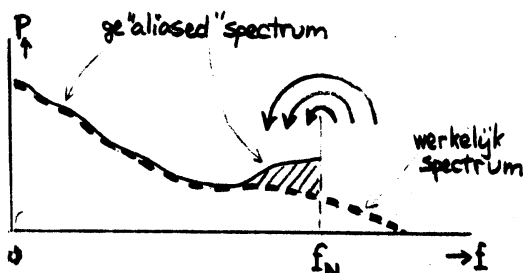


fig. 3

Het is daarom raadzaam Δt , en daarmee f_N , zó te kiezen dat boven de Nyquistfrequentie praktisch geen energie aanwezig is. Aliasing is mathematisch nooit te achterhalen en dus ook niet te corrigeren.

8. Invloed toevalseffecten: variabiliteit van de spectraalschattingen

Van periodieke functies laat het spectrum zich exact berekenen (harmonische analyse). Voor het ware spectrum $P(f)$ van een stochastisch proces kunnen uit realisaties $X(1)(t)$, $X(2)(t)$, ... slechts schattingen $P(1)(f)$, $P(2)(f)$, ... worden verkregen, welke variabiliteit vertonen. Wel worden, naarmate de registratie-lengte $T \rightarrow \infty$, de punt-schattingen voor een bepaalde frequentie f_0 gemiddeld gelijk aan $P(f_0)$, maar het merkwaardige is dat de variabiliteit eindig blijft! Dit is de verklaring van het feit dat ingenieurs bij het harmonisch analyseren van "witte ruis" (uniform spectrum) toch een grillig gepiekt spectrum zagen, dat statistici hetzelfde ondervonden m.b.t. random-getallen en ... dat meteorologen zoveel "periodiciteiten" ontdekten.

De ongemodificeerde harmonische analyse (periodogram-analyse), adequaat voor het analyseren van periodieke functies, faalt dus bij toepassing op stochastische processen. Iets soortgelijks doet zich voor bij het schatten van een waarschijnlijkheidsdichtheidsfunctie uit een histogram met een relatief geringe klassebreedte. Slechts middeling over een betrekkelijk breed interval levert betrouwbare resultaten. Natuurlijk gaat dit ten kosten van het oplossend vermogen (resolutie) van het spectrum. De eindigheid van het registratie-interval levert al een zekere "uitsmering" van de puntschattingen over een band van frequenties maar het is de vraag of dit in enig opzicht optimaal is. Hoe dan ook, men blijft gebonden aan de "onzekerheidsrelatie" van de spectraalanalyse: bandbreedte \times variabiliteit = constant. Anders uitgedrukt: resolutie \times stabiliteit = constant.

9. Kernen en vensters

De convolutie $P(f) * Q_T(f)$ (punt 6) bleek een ongewilde uitsmering van het geschatte spectrum. Men heeft gezocht naar opzettelijke convoluties $P(f) * \Lambda(f)$. De gewichtsfunctie $\Lambda(f)$, dikwijls kern genoemd, moet dan aangepast zijn aan het doel van het onderzoek. Voornamelijk zijn twee zaken daarbij van belang:

- 1e. de vorm van de kern;
- 2e. de bandbreedte *) van de kern.

Wat de vorm betreft moet gelet worden op de hoofdpijk en de secundaire toppen en ook dalen: de dusgenaamde "hoofdlob" en de "zijlobben". Het is wenselijk dat geen grote zijlobben optreden, wanneer de energie "weglekt".

Het tijds-equivalent van $P(f) * \Lambda(f)$ is $C(\tau)$. $\lambda(\tau)$ waarin $\lambda(\tau) \iff \Lambda(f)$. In plaats van de tijdrovende convolutie in het spectraal-domein kan men dus ook in het tijd-domein de vermenigvuldiging toepassen. Men zegt dan dat de ACF het venster $\lambda(\tau)$ passeert. Een geschikt venster is

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos \frac{2\pi\tau}{T}, & |\tau| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , |\tau| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

In de praktijk kiest men $a = 0,23$ ("Hamming" venster, naar R.W.Hamming) of $a = 0,25$ ("Hanning" venster, naar de Oostenrijkse meteoroloog Julius von Hann). Beide vensters hebben een voor- en een nadeel:

- a) de eerste zijlob van de Hamming-kern is ongeveer $1/3x$ zo groot als die van Hanning;
- b) de hoogte van de zijlobben van Hanning gaat sneller naar 0 dan bij Hamming.

Blackman en Tukey hebben zich aanzienlijke hoeveelheden tijd en inspanning getroost om betere vensters te construeren. Hun conclusie was dat het beter is de nadruk te leggen op het voorafgaande "filteren" van de data.

10. Filters

Convolutie met de kern zagen we optreden in het frequentie-domein, vermenigvuldiging met het venster in het tijd-domein. Het omgekeerde heet filteren.

In een fysisch filter (bijvoorbeeld een meet-instrument) kan de tijdresponsie niet anticiperen op toekomstige input, met andere woorden $h(t) = 0$ voor $t < 0$. In een mathematisch of digitaal filter —een lineair gewogen voortschrijdend gemiddelde— geldt deze beperking niet. Men haalt hieruit het voordeel symmetrische filters — $h(t) = h(-t)$ — te construeren; bij het passeren van een dergelijk filter wordt het fase-spectrum niet veranderd.

*) Dit begrip kan op vele manieren worden gedefinieerd. Het is een maat voor de uitsmeringsbreedte.

Een aan de eigenlijke spectraalanalyse voorafgaand filterprocédé is zeer belangrijk. Het stelt de onderzoeker in staat om:

- 1e) gemiddelde en eventuele trend tot nul te reduceren ("high pass" filter);
- 2e) frequenties groter dan de Nyquistfrequentie uit te zeven teneinde "aliasing" te vermijden ("low pass");
- 3e) cyclische componenten, zoals dagelijkse of jaarlijkse gang, te elimineren, of om fluctuatie in verschillende banden te separeren ("band pass");
- 4e) "prewhitening" van het spectrum toe te passen, d.w.z. het, na een preliminaire vorm-analyse van het spectrum (pilot analysis), zodanig filteren dat het spectrum nagenoeg uniform ("wit") wordt, met andere woorden piekvrij.

De bedoeling van prewhitening kan moeilijk zonder meer duidelijk zijn. We volstaan met op te merken dat in de eigenlijke analyse-fase het hinderlijke "weglekken" van energie naar de zijlobben van de gebruikte kern, waardoor bij aanwezigheid van een reële piek irreële subsidiaire pieken worden geïntroduceerd, na prewhitening geen kwaad meer kan. Uiteraard moet na convolutie met de kern het geschatte spectrum worden gecorrigeerd voor het effect van prewhitening door een invers procédé dat men "recoloring" noemt.

11. Interpretatie van het spectrum

De vraag of een piek in het geschatte spectrum overeenkomt met een piek in het ware spectrum is dikwijls zeer moeilijk te beantwoorden. Veelal bekijkt men de afwijking van de spectraalschattingen van een nul-continuum. Dit moet dan worden gedefiniëerd als een zeer sterk gladgestreken versie van het geschatte spectrum of als een hypothetisch spectrum afgeleid uit bepaalde theoretische overwegingen. Bijvoorbeeld gaat men na of in een meteorologische tijdreeks persistentie overheerst. Zo ja, dan past men het bij deze persistentie behorende "rode ruis" spectrum aan aan het geschatte spectrum. Dit "rode ruis" spectrum wordt dan benoemd tot nul-continuum, waarna door de spectrale-schattingstheorie aangegeven betrouwbaarheidsintervallen moeten beslissen of de afwijkingen van het nulcontinuum significant zijn of niet. In dit alles schuilt veel onzeker.

Alvorens nog subtielere statistische beschouwingen toe te passen is het goed de raad van Jenkins (1961) ter harte te nemen en eerst eens te zien of de twee helften van een en dezelfde lange tijdreeks bij benadering dezelfde spectra geven. Dit kan een verhelderende indicatie geven inzake de rol van toevalseffecten of het eventueel niet-stationair zijn van de reeks.

12. Voordelen van spectraalanalyse

Statistici preferen veelal het gebruik van de ACF boven dat van de SPD. Zij huiveren ervoor zich in het frequentie-domein te bewegen en "rillen" alleen al van het spectrale jargon der ingenieurs. Toch is dit het "esperanto" voor alle technologische toepassingen van alle mogelijke oscillerende systemen, ook voor het karakteriseren van de eigenschappen van apparaten (frequentie-responsie!). Tegenwoordig ziet men de spectrale representatie als de meest directe beschrijving van fysische mechanismen. Ook in een wetenschap als de economie is de spectrale beschouwingwijze volledig ingeburgerd.

De SPD biedt dan ook, in vergelijking met de ACF, gunstiger mogelijkheden tot fysische interpretatie. Het spectrum biedt a.h.w. de natuurlijke sleutel tot het detecteren van verschillende causale mechanismen. De meeste verschijnselen zijn niet zuiver periodiek. Wel vertonen zich quasi-periodiciteiten, cycli, rhythmten e.d. in de vorm van een "berg" in het spectrum. Twee bergen, significant gescheiden door een dal, kunnen duiden op twee wezenlijk verschillende fysische oorzaken. Zo ontdekte men in het wind-onderzoek met spectraal-analyse, afgezien van het gewone hoog-frequente deel van het turbulentie-spectrum, nog een laag-frequent component die samenhangt met de dagelijkse gang van de wind.

Zeer belangrijk is tenslotte de kwestie van de steekproefeigenschappen. Deze zijn bij spectra aanzienlijk eenvoudiger dan bij autocovariantiefuncties.

Dit alles betreft slechts algemeenheden. We kunnen dan ook zeggen dat in het algemeen de SPD de voorkeur moet verdienen boven de ACF.

13. Slotopmerkingen

- Multipiele tijdreeksen, evenals de daarmee samenhangende kruis-spectra, moesten in dit colloquium onbesproken blijven.
- Mutatis mutandis blijven alle beschouwingen geldig wanneer niet een tijdreeks maar een andersoortige reeks wordt geanalyseerd. Wanneer bijvoorbeeld een ruimtecoördinaat de plaats inneemt van de tijd, wordt "frequentie" vervangen door "golfgetal" enz.
- Niet-stationariteit kan vaak verholpen worden door het filteren van trend, jaarlijkse gang e.d.
- Niet-normaliteit wordt nogal eens verholpen door een geschikte transformatie van de data. Het bepalen van het spectrum van een duidelijk niet-gaussisch proces is toch niet zinloos, mits men twee dingen niet vergeet:
 - 1e de waarschijnlijkheidsstructuur van het ensemble is nu niet meer volledig bepaald door de SPD;
 - 2e er gelden andere steekproefeigenschappen.
- Men moet zeer voorzichtig zijn met het gebruik van een (ongewogen) voortschrijdend gemiddelde. Dit is niet het meest geschikte filter dat jaarlijkse gang e.d. kan elimineren. In sommige gevallen maakt het de resultaten van een onderzoek bij voorbaat twijfelachtig. Een voorbeeld is te vinden in het onderzoek naar de fluctuatie van de atmosferische circulatie die bekend staat als de "Zuidelijke Schommeling". De Z.S. zou een periodiciteit vertonen van 1-5 jaren. Men heeft getracht deze aan te tonen op grond van het verloop van 6-maandelijkse voortschrijdende gemiddelden van bijvoorbeeld drukanomalieën. Nu zou een reeks van random maandelijkse waarden zonder autogecorreleerdheid (d.w.z. met een uniform spectrum) in het perioden-interval van 1 tot 5 jaren een aandeel van plm. 13% in de totale variantie te zien geven. Evenwel geeft het genoemde filter juist in dit interval een dermate grote opeenhoping van energie dat dit aandeel plm. 58% wordt! M.a.w., zou er geen Z.S. bestaan, dan komt deze, dankzij het gebruik van een 6-maandelijks voortschrijdend gemiddelde, toch uit het onderzoek tevoorschijn.

14. Literatuur

Blackman, R.B. and Tukey, J.W., 1958: The measurement of power spectra. Dover books on math. S507, 190 pp. New York.

Change, Climatic, 1966: W.M.O. Technical Note No. 79.

Granger, C.W.J. and Hatanaka, M., 1964: Spectral analysis of economic times series. Princeton.

Jenkins, G.M., 1961: General considerations in the analysis of spectra. Technometrics, Vol. 3, No. 2, pp. 133-166.

Lee, Y.W., 1966: Statistical theory of communication. New York.

Papoulis, A., 1965: Probability, random variables and stochastic processes. New York.

Parzen, E., 1961: Mathematical considerations in the estimation of spectra. Technometrics, vol. 3, No. 2, pp. 167-190.