

29 NOV. 1963

Verslagen V-141
(R III 282-1963)

KONINKLIJK NEDERLANDS
METEOROLOGISCH INSTITUUT

0 — De invloed van advectiewarmte op de
temperatuur van een waterbekken

door

Drs. J.Q. Keyman

551.526

De Bilt, november 1963.



De invloed van advectionwarmte op de
temperatuur van een waterbekken

door

Drs. J.Q. Keyman

1. Inleiding

Indien aan een waterbekken hoeveelheden water toegevoerd en onttrokken worden, b.v. door eb- en vloedstromen, kan dit watertransport over een zeker tijdsverloop, in dit geval de eb- en vloedperiode resulteren in een netto transport van warmte uit of naar het bekken. Dit warmtetransport, in het vervolg advectionwarmte genoemd, zal de gemiddelde watertemperatuur van het bekken beïnvloeden. Deze invloed komt tot uiting indien de wateruitwisseling en dus ook de daar mee samengaande warmteuitwisseling van het bekken met de aangrenzende watermassa's afgesneden wordt. De gemiddelde dagelijkse en jaarlijkse gang van de watertemperatuur zullen zich dan wijzigen. In dit rapport zal eerst een formule voor de bepaling van de advectionwarmte afgeleid worden. Vervolgens zal geprobeerd worden met behulp van een beschouwing over de energiebalans van een watermassa het verband tussen de advectionwarmte en de temperatuurverandering te bepalen.

2. Een formule voor de advectionwarmte

We beschouwen eerste het geval van een waterbekken dat op één plaats in verbinding staat met de zee en dat verder geheel afgesloten is. Ter plaatse van deze verbinding denken we ons een verticaal vlak in het water. De momentane hoeveelheid warmte (q) welke door het water per tijdseenheid wordt getransporteerd door een sectie van eenheidsbreedte van dit vlak wordt gegeven door:

$$(1) \quad q = \int_0^h (\rho c u T) dz$$

waarin ρ de dichtheid van het water is, c zijn soortelijke warmte, u zijn snelheidscomponent loodrecht op het verticale vlak, T zijn temperatuur, z de verticale coördinaat t.o.v. het bodemoppervlak, h de diepte.

We beschouwen ρ en c als constanten. Door turbulentie in het water veranderen u en T van moment tot moment. We voeren in de gemiddelden over een periode T en de fluctuaties ten opzichte van deze gemiddelden:

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad T = \bar{T} + T'$$

De periode τ moet groot zijn ten opzichte van de fluctuatieperioden van de turbulente stroming maar klein ten opzichte van de getijperiode.

Verder voeren we in de gemiddelden van \bar{u}^T en \bar{T}^T over de diepte h :

$$\bar{u}^T = \overline{u^T} + (\bar{u}^T)'' , \quad \bar{T}^T = \overline{T^T} + (\bar{T}^T)''$$

We onderstellen dat de verticale temperatuurverschillen te verwaarlozen zijn wegens sterke verticale menging dus $(\bar{T}^T)'' = 0$. Voor het momentane warmtetransport krijgen we nu:

$$q = \rho c \int_0^h \{ \overline{u^T} + (\bar{u}^T)'' \} \{ \overline{T^T} + T' \} dz$$

We middelen nu over de periode τ

$$\bar{q}^T = \rho c \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^h \{ \overline{u^T} + (\bar{u}^T)'' \} \{ \overline{T^T} + T' \} dz dt$$

$$(2) \quad \bar{q}^T = \rho c h \overline{\overline{u^T T^T}} + \rho c h \overline{\overline{u^T T^T}}''$$

We onderstellen in het nu volgende dat in het rechterlid de tweede term die betrekking heeft op het turbulente transport, te verwaarlozen is ten opzichte van de eerste term, die het advectieve transport voorstelt. We vereenvoudigen de notatie en schrijven

$$(3) \quad q = \rho c h u T$$

waarin u en T gemiddeld zijn over de periode τ en de diepte h . Er is ook nog de horizontale coördinaat y van het beschouwde vlak: $h = h(y)$, $u = u(y)$ en $T = T(y)$.

Zij $z(y)$ het volumen dat per tijdseenheid door de eenheidssectie stroom dan geldt

$$z(y) = h(y) u(y) \text{ en } q(y) = \rho c z(y) T(y)$$

Voor het advectieve warmtetransport Q door het gehele vlak geldt:

$$(4) \quad Q = \rho c \int_0^{y_0} z(y) T(y) dy$$

waarin y_0 de breedte van de monding voorstelt.

Analoog aan het voorafgaande hebben we:

$$z(y) = \overline{z(y)}^{y_0} + z(y)' , \quad T(y) = \overline{T(y)}^{y_0} + T(y)'$$

Substitueren van deze uitdrukking in (4) geeft:

$$(5) \quad Q = \rho c y_0 \overline{\overline{z(y) T(y)}}^{y_0} + \rho c y_0 \overline{\overline{z(y)' T(y)'}}^{y_0}$$

We zullen aannemen dat er geen stochastisch verband tussen $z(y)$ en $T(y)$ bestaat. De tweede term in het rechter lid van (5) vervalt dan. Voor (5) schrijven we nu

$$(6) \quad Q = \rho c R T$$

waarin dus R de totale hoeveelheid water is die per tijdseenheid door het verticale vlak stroomt en T de temperatuur, die gemiddeld is over het vlak en de periode τ .

3. Enige opmerkingen over de advectiewarmte van getijstromen.

We beschouwen het geval van een aan een zijde open bassin, waarin getijstromen voorkomen. Met (6) kan de advectiewarmte per getijperiode τ_0 berekend worden als R en T als functie van de tijd bekend zijn:

$$(7) \quad Q_v = \rho c \int_0^{\tau_0} R(t) T(t) dt$$

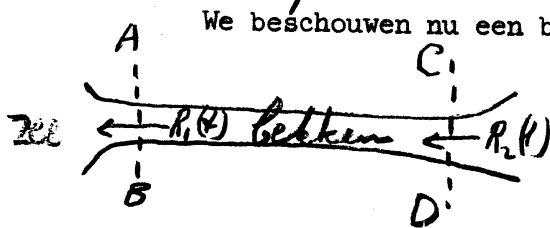
Het nulpunt van de temperatuurschaal kan willekeurig gekozen worden, want voor een getijperiode geldt $\int_0^{T_0} R(t) dt = 0$.

We nemen eens aan, dat R en T sinusvorming met de tijd verlopen:

$R = R_0 \sin \omega t$ en $T = T_0 \sin(\omega t - \varphi)$. Dan krijgen we

(8) $Q_v = \frac{1}{2} \rho c R_0 T_0 \omega \cos \varphi$

In werkelijkheid zal het verloop van R en T niet geheel sinusvorming zijn maar (8) duidt er toch wel op dat het van belang is behalve de amplituden ook de fasehoek φ te bepalen.



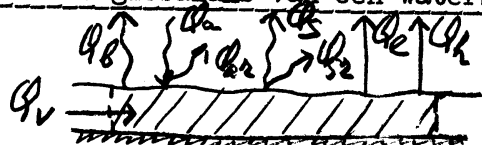
We beschouwen nu een bekken met twee openingen en een constante rivierafvoer R_a . We hebben nu voor de doorsnede langs AB en CD (zie figuur) resp.: $R_1(t) = R_a + R_1'(t)$ en

$R_2(t) = R_a + R_2'(t)$ waarin $R_1'(t)$ en $R_2'(t)$ de zuivere getijstromen zijn. Er geldt $\int_0^{T_0} R_1'(t) dt = \int_0^{T_0} R_2'(t) dt = 0$. Voor de advectionwarme krijgen we nu:

(9) $Q_v = \rho c \int_0^{T_0} \{ R_1(t) T_2(t) - R_2(t) T_1(t) \} dt$
 $Q = \rho c R_a \int_0^{T_0} \{ T_2(t) - T_1(t) \} dt + \rho c \int_0^{T_0} R_1'(t) T_2(t) dt - \rho c \int_0^{T_0} R_2'(t) T_1(t) dt$

Het is dus mogelijk dat behalve de getijbewegingen ook de gemiddelde doorstroming een bijdrage tot de advectionwarme geeft. Sluit men het bassin af aan de monding bij AB, zodat geen getijbeweging meer optreedt dan worden de tweede en derde term in het rechter lid van (9) nul. Indien water gespuid wordt bij afwezigheid van getijbeweging, dan is het mogelijk, dat de eerste term niet nul wordt, doordat T_2 en T_1 verschillen.

4. De energiebalans van een waterbekken



De energiebalans van een waterbekken ziet er als volgt uit:

(10) $Q_s - Q_{s2} + Q_a - Q_{a2} - Q_f - Q_e - Q_h + Q_v = Q_w$

waarin:

- Q_s globale (kortgolvice) straling
- Q_{s2} gereflecteerde globale straling
- Q_a langgolvice atmosferische straling
- Q_{a2} gereflecteerde atmosferische straling
- Q_f langgolvice uitstraling van het water
- Q_e stroom van latende verdampingswarmte
- Q_h stroom van voelbare warmte van water naar de lucht
- Q_v advectionwarme
- Q_w toename warmteinhoud van het bekken.

Ondersteld wordt dat de warmtestroom van water naar bodem of omgekeerd te verwaarlozen is. Daar de energieuitwisseling aan het grensvlak met de atmosfeer gewoonlijk per oppervlakte-eenheid wordt beschouwd, zullen we in het volgende de energiebalans van een waterkolom met een doorsnede van een oppervlakte-eenheid beschouwen. We gebruiken dan het symbool q :

$$(11) \quad q_s - q_{s2} + q_a - q_{ar} - q_l - q_e - q_h + q_v = q_w$$

(5) De relatie van de advectiewarmte met de watertemperatuur

Indien de advectiewarmte q_v niet meer aan het bekken toegevoerd of onttrokken wordt, zal de gemiddelde watertemperatuur veranderen. Met behulp van (11) kan deze temperatuurverandering berekend worden.

We voeren in

$$q_i = q_s - q_{s2} + q_a - q_{ar}$$

en

$$q_u = q_l + q_e + q_h$$

De grootte q_i is onafhankelijk van het aanwezig zijn van de advectiewarmte.

De grootte q_u hangt echter van q_v af, daar q_l , q_e en q_h van de watertemperatuur afhangen.

We gebruiken de volgende relaties:

$$(12) \quad q_l = \varepsilon \sigma T^4$$

waarin ε = emissiecoëfficiënt van water

σ = constante van Stefan-Boltzmann

T = watertemperatuur in °Kelvin.

$$(13) \quad q_e = (e - e_a) L f(u)$$

$$(14) \quad \text{en} \quad \frac{q_e}{q_h} = f \frac{T - \bar{t}_a}{\bar{t} - e_a}$$

waarin e = verzadigde dampspanning van water bij temperatuur T ,

e_a, \bar{t}_a = waterdampspanning en luchttemperatuur op bepaalde hoogte boven het wateroppervlak,

L = verdampingswarmte van water.

f = psychrometerconstante = 0,49 mm Hg/°C

u = windsnelheid op bepaalde hoogte boven het water.

Uit (12), (13) en (14) volgt

$$(15) \quad q_u(T, \bar{t}_a, e_a, u) = \varepsilon \sigma T^4 + \{(e - e_a) + f(T - \bar{t}_a)\} L f(u)$$

De energiebalans van de eenheidswaterkolom zonder advectieterm voor

gegevens door:

$$(16) \quad q_i - q_u(T, \bar{t}_a, e_a, u) = \frac{d}{dt} (\rho c h T)$$

waarin \bar{h} de gemiddelde waterdiepte en T de gemiddelde watertemperatuur is. De energiebalans met advectieterm luidt:

$$(17) \quad q_i + q_v - q_u(T, T_a, e_a, u) = \frac{d}{dt}(\rho c h T)$$

waarin T de gemiddelde watertemperatuur is. Onder de aanname dat behalve q_i , ook e_a , T_a en u onafhankelijk van q zijn, volgt uit (16) en (17):

$$(18) \quad q_v - \frac{\partial q_u}{\partial T} \Delta T = \rho c h \frac{d(\Delta T)}{dt}$$

waarin $\Delta T = T - T_a$ de gezochte temperatuurverandering is. In plaats van (18) schrijven we

$$(19) \quad \frac{d(\Delta T)}{dt} + \frac{\partial q_u}{\partial T} \Delta T = \frac{q_v}{\rho c h}$$

Dit is een differentiaalvergelijking voor ΔT van de eerste orde waarin $\frac{\partial q_u}{\partial T}$ berekend wordt met behulp van de betrekking (15) gedifferentieerd naar T :

$$(20) \quad \frac{\partial q_u}{\partial T} = 4 \epsilon \sigma T^3 + \left(\frac{de}{dT} + \gamma \right) L \gamma(u)$$

Ter illustratie beschouwen we het volgende geval. We stellen $q_v = q_0 \sin \omega t$ met een periode van 1 jaar en nemen $\frac{\partial q_u}{\partial T}$ constant. De stationaire oplossing van (19) is dan:

$$(21) \quad \Delta T = \frac{q_0}{\frac{\partial q_u}{\partial T} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

waarin $\tau = \rho c h / \frac{\partial q_u}{\partial T}$ en $\varphi = \tan^{-1} \omega \tau$

We gebruiken $L \gamma(u) = 7,2 u_g \text{ cal/cm}^2 \text{ dag mm Hg}$, waarin u_g de windsnelheid in m/s is op 8 m hoogte ¹⁾. Met $u = 5 \text{ m/s}$ en $T = 283^\circ \text{K}$ vinden we $4 \epsilon \sigma T^3 = 10 \text{ cal/cm}^2 \text{ dag } ^\circ \text{C}$, $\frac{de}{dT} = 0,8 \text{ mm Hg/}^\circ \text{C}$, $L \gamma(u) = 36 \text{ cal/cm}^2 \text{ dag mm Hg}$ dus $\frac{\partial q_u}{\partial T} = 60 \text{ cal/cm}^2 \text{ dag } ^\circ \text{C}$ en met $h = 400 \text{ cm}$ We kunnen dus (21) vereenvoudigen tot

$$(22) \quad \Delta T = q_0 \left(\frac{\partial q_u}{\partial T} \right)^{-1} \sin(\omega t - \varphi)$$

Om een maximale temperatuurverandering van 1°C te veroorzaken, is dus een waarde van q_0 van $60 \text{ cal/cm}^2 \text{ dag}$ nodig. Bij een wateroppervlak van b.v. 100 km^2 is dan een maximale warmtetoevoer van ongeveer $3 \cdot 10^{10} \text{ kcal}$ gemiddeld per getijde nodig.

Opgemerkt kan nog worden dat het niet-stationaire deel van de oplossing van (19) verwaarloosd kan worden. Dit deel heeft de gedaante $\text{const. exp} - \frac{t}{\tau}$ met 7 dagen. Dit heeft tot gevolg, dat het niet stationaire deel reeds enige weken na de afsluiting te verwaarlozen is ten opzichte van het stationaire deel.

6. Invloed van afwisselend droogvallen en onderlopen op de energiehuishouding

In het voorafgaande werd aangenomen dat de niet-gereflecteerde kortgolvlige straling geheel door het water wordt geabsorbeerd en dus niet ten dele gebruikt wordt voor verwarming van de bodem. Indien nu de waterlaag bij afnemend getij geleidelijk dunner wordt, zal er ook kortgolvlige straling geabsorbeerd

¹⁾ ontleend aan Lake Hefner Studies, Technical Report, Geological Survey Circular 229, Washington 1952.

worden aan het bodemoppervlak. De warmtegeleiding in water is zelfs bij geringe turbulentie meerdere orden groter dan de moleculaire warmtegeleiding in de bodem. Er zal derhalve zeer weinig warmte in de bodem verdwijnen zelfs bij een dunne waterlaag. Uiteraard zal de dunne waterlaag wel warmer worden dan dieper water maar door vermenging vereffenen de temperatuurverschillen zich weer.

Indien overdag een deel van de bodem geheel droog valt, kan warmte verzameld worden die na het onderlopen in het water overgaat. s'Nachts kan het omgekeerde effect optreden. Bepaalde plaatsen zullen slechts korte tijd droog liggen, andere langer. Bovendien schuiven de perioden van droog liggen ongeveer 50 minuten per dag op. Het is dus een tamelijk gecompliceerde toestand. Misschien kan men op de volgende wijze een schatting maken van de hoeveelheid warmte, die door de bodem uit de atmosfeer wordt opgenomen en vervolgens aan het water wordt afgegeven.

Het temperatuurverloop aan het bodemoppervlak is ongeveer periodiek met als periode de getijperiode. Dit verloop kan met behulp van een harmonische analyse met een Fourierreeks worden beschreven:

$$(23) \quad T = T_0 + R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + R_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

De temperatuur op een diepte z in de bodem en op het tijdstip t volgt uit de betrekking:

$$(24) \quad T(z, t) = T_0 + Kz + R_1 e^{-\frac{z}{D_1}} \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{z}{D_1}) + R_2 e^{-\frac{z}{D_2}} \cos(2\omega t + \varphi_2 - \frac{z}{D_2}) + R_3 e^{-\frac{z}{D_3}} \cos(3\omega t + \varphi_3 - \frac{z}{D_3}) + \dots$$

Hierin is $D_1 = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$, $D_2 = \sqrt{\frac{2a}{2\omega}}$, $D_3 = \sqrt{\frac{2a}{3\omega}}$, $a = \frac{\lambda}{C}$, λ het warmtegeleidingsvermogen en C de soortelijke warmtecapaciteit in de bodem. De grootte D , dempingsdiepte genoemd, neemt dus af met toenemende frequentie van de harmonischen. Door het temperatuurverloop aan het bodemoppervlak met een enkele cosinuscurve te beschrijven, overschat men de hoeveelheid warmte die afwisselend door de bodem wordt opgenomen en vervolgens afgegeven.

In plaats van (23) en (24) nemen we nu

$$(25) \quad T = T_0 + R_1 \cos \omega t$$

$$(26) \quad T(z, t) = T_0 + Kz + R_1 e^{-\frac{z}{D_1}} \cos(\omega t - \frac{z}{D_1})$$

Het tijdsafhankelijke deel van de warmte-inhoud van de bodem is nu

$$(27) \quad q' = R_1 C \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{D_1}} \cos(\omega t - \frac{z}{D_1}) dz$$

Uitwerken van (27) geeft

$$(28) \quad q' = \frac{1}{2} \sqrt{2} R_1 C D_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

Voor nat zand geldt $\lambda = 0,004 \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$$C = 0,4 \text{ cal cm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ cm} \quad a = \frac{\lambda}{C} = 0,01 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{Met } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ rad sec}^{-1} \text{ vinden we } D_1 = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = 12 \text{ cm}$$

Voor de hoeveelheid warmte q'' die door de bodem wordt opgenomen en weer afgestaan, vinden we $\sqrt{2} \cdot R_1 C D_1 = 6,0 R_1 \text{ cal cm}^{-2}$.

De temperatuurstijging van het bodemoppervlak wordt sterk geremd door de omstandigheid dat veel energie verbruikt wordt voor verdamping van het water, dat in overvloed aanwezig is. Een eventuele begroeiing van het oppervlak zal de temperatuurstijging nog verkleinen. Als we eens $R_f = 5^\circ\text{C}$ stellen als gemiddelde voor de zomermaanden, vinden we $q'' = 34 \text{ cal cm}^{-2}$. Daar het volgende laagwater in de nacht valt en het effect dan van teken omkeert, geldt per etmaal dat q'' naar schatting ten hoogste 30 cal cm^{-2} is. Is het percentage droogvallende gronden b.v. 30%, dan vinden we gemiddeld over het bekken $q'' \sim 10 \text{ cal cm}^{-2} \text{ dag}^{-1}$. In de winter zal q'' veel kleiner zijn of zelfs van teken veranderen. De grootte q'' moet als een correctie op q_v opgevat worden. De invloed van q'' op de te berekenen ΔT van (21) en (22) is zeer klein, nl. ten hoogste $0,1$ à $0,2^\circ\text{C}$.