

Numerieke oplossing van een oneigenlijke
Fredholm-integraalvergelijking van de
eerste soort

door

H. de Hart

De Bilt, 1967

Numerieke oplossing van een oneigenlijke Fredholm-integraalvergelijking van de eerste soort

H. de Hart

0. Inleiding.

Integraalvergelijkingen worden onderverdeeld in twee hoofdtypen:

- a) Fredholm-integraalvergelijkingen. Bij deze vergelijkingen zijn de integratiegrenzen vaste getallen.
- b) Volterra-integraalvergelijkingen. Bij deze vergelijkingen is één der integratiegrenzen een vast getal, terwijl de andere grens de onafhankelijk variabele is.

Beperken we ons tot lineaire integraalvergelijkingen, dan zijn deze nog onder te verdelen in drie soorten, te weten:

$$\int_a^b k(x,y)f(y)dy = g(x) \quad (0.1)$$

$$\int_a^b k(x,y)f(y)dy = g(x) + f(x) \quad (0.2)$$

$$\int_a^b k(x,y)f(y)dy = \lambda f(x) \quad (0.3)$$

In deze vormen zijn $k(x,y)$ en $g(x)$ bekende functies, terwijl $f(x)$ de gezochte functie is. De vormen (0.1), (0.2) en (0.3) stellen opvolgend integraalvergelijkingen voor van de eerste, tweede en derde soort.

Voor het numeriek oplossen van integraalvergelijkingen zijn enige min of meer standaardmethoden bekend. In de praktijk wordt de keuze van de oplossingsmethode bepaald door de boven beschreven indeling en door eventueel aanwezige bijzondere kenmerken. Globaal gezien komt de numerieke oplossing hier op neer, dat de integraal wordt vervangen door een som van termen die een benadering vormt voor de integraal.

Op een dergelijke manier kan dan (0.1) vervangen worden door

$$\sum_{i=1}^n C_i k(x,y_i)f(y_i) \approx g(x) \quad (0.4)$$

Hierin zijn de C_i 's coëfficiënten van de gekozen numerieke integratie methode. Voor iedere waarde van x geeft (0.4) een lineaire vergelijking in de n onbekende funktiewaarden $f(y_i)$.

Door nu voor x n waarden te kiezen, wordt een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden verkregen. Bovendien wordt aan het linkerlid van (0.4) nog een term $C = C(x)$ toegevoegd, die het verschil weergeeft tussen de integraal en haar numerieke benadering. De bepaling van $C(x)$ geschiedt iteratief.

In dit verslag zal de oplossing van een vorm als (0.1) worden besproken, waarbij de bijzonderheid zich voordoet dat het integratie interval oneindig is met $a = -\infty$ en $b = +\infty$.

1. Probleemstelling.

Het hier behandelde probleem is uit de praktijk naar voren gekomen en kan in het kort als volgt worden omschreven.

De verdeling van de som van een grootheid en zijn meetfout is gegeven. Gevraagd wordt hieruit de verdeling van de grootheid zelf af te leiden, indien de verdeling van de meetfout bekend is.

Stel een grootheid v wordt gemeten met een meetfout ε . De gemeten waarde is dan $u = v + \varepsilon$. De meetuitkomsten u zijn $N(0.500, 0.05)$ verdeeld. Noemen we de verdelingsfunctie van u $g(u)$ dan kunnen we schrijven:

$$g(u) = \frac{1}{0.051 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(u-0.500)^2}{0.0052} \right] \quad (1.1)$$

De meetfout ε is $N(0, \sigma_\varepsilon)$ verdeeld, waarbij $\sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(u)$.

In werkelijkheid zal gelden $\sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(v)$, maar numeriek is alleen de afhankelijkheid van u bekend en deze kan worden voorgesteld door

$$\sigma_\varepsilon(u) = 0.107 \exp(-2.80u) \quad (1.2)$$

Dit houdt dus in, dat voor iedere waarde van u ε een andere verdeling heeft. D.w.z. wel steeds een normale verdeling met verwachting gelijk aan nul, maar een standaarddeviatie die afneemt naarmate u toeneemt.

Noemen we de verdelingsfunctie van ε $h(\varepsilon)$ dan kunnen we hiervoor schrijven:

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon(u) \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-\varepsilon^2}{2\{\sigma_\varepsilon(u)\}^2} \right] \quad (1.3)$$

Uitgaande van (1.1), (1.2) en (1.3) wordt gevraagd de verdelingsfunctie $f(v)$ te berekenen van de metingen zonder fout ε .

Het probleem kan als opgelost worden beschouwd, indien voor een zodanig aantal waarden van v de numerieke waarde van $f(v)$ bekend is, dat hieruit voor ieder ander, willekeurig gekozen basispunt v de waarde van $f(v)$ voldoende nauwkeurig door interpolatie is te bepalen.

2. Afleiding van de integraalvergelijking.

Een meetuitkomst zal een waarde kleiner dan u opleveren indien, ongeacht de ware waarde v , voor de bijbehorende meetfout ε is voldaan aan $\varepsilon < u - v$.

Exact geformuleerd geeft dit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \int_{-\infty}^{u-v} h(\varepsilon) d\varepsilon dv = \int_{-\infty}^u g(x) dx \quad (2.1)$$

Dit is ook te schrijven als:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \int_{-\infty}^u h(\varepsilon-v) d\varepsilon dv = \int_{-\infty}^u g(x) dx \quad (2.2)$$

Gezien de aard van de functies g en h is in het linkerlid verwisseling van integratie toegestaan. Passen we dit toe en differentiëren we daarna linker- en rechterlid naar u dan verkrijgen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) h(u-v) dv = g(u) \quad (2.3)$$

Hiermee is het probleem herleid tot de eerder genoemde integraalvergelijking.

3. Numerieke aanpak van het probleem.

Substitutie van (1.1), (1.2) en (1.3) in (2.3) geeft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \frac{1}{0.107\sqrt{2\pi} \exp(-2.80u)} \exp\left[\frac{-(u-v)^2}{0.0229 \exp(-5.60u)}\right] dv = \frac{1}{0.051\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(u-0.500)^2}{0.0052}\right] \quad (3.1)$$

Na enige omwerking is dit te herleiden tot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp[-43.672(u-v)^2 \exp(5.60u)] dv = 2.098 \exp\left[-2.80u - \frac{(u-0.500)^2}{0.0052}\right] \quad (3.2)$$

De vorm (3.2) moet gelden voor iedere waarde van u . Substitutie van een waarde van u en toepassing op het linkerlid van een numerieke integratie methode die n basispunten gebruikt, leidt tot een lineaire vergelijking. waarin de n onbekenden de functiewaarden $f(v_j)$ in de n basispunten v_j zijn. Door deze procedure toe te passen voor n verschillende waarden van u wordt een lineair stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden verkregen.

Er zijn hierbij twee vragen en wel:

- 1) welke waarden van u komen in aanmerking,
- 2) welke integratiemethode is het best toepasbaar.

Het antwoord op de eerste vraag wordt gevonden uit (1.1). Daar $u \mathcal{N}(0.500, 0.051)$ verdeeld is, is het voor de hand liggend om voor u waarden te kiezen die niet te veel van 0.500 afwijken en bij voorkeur geen waarden die in de staarten van de verdeling vallen.

Ogenschijnlijk is ook de tweede vraag eenvoudig te beantwoorden. Voor een integratieinterval van $-\infty$ tot $+\infty$ is de aangewezen methode die van Hermite. Deze methode maakt gebruik van een aantal niet equidistante punten die symmetrisch rond nul liggen en werkt het meest effectief indien het maximum van de integrand optreedt voor de waarde nul van de integratievariabele.

Uit (3.2) blijkt dat in dit geval niet aan deze voorwaarde is voldaan. Daar het maximum optreedt voor $u = v$ en v variabel is dan ook door een transformatie niet aan deze voorwaarde worden voldaan. Getracht is de methode van Hermite toe te passen, maar dit leverde geen resultaat op. De verkregen oplossing was een onzinnig samenraapsel van de meest onwaarschijnlijke waarden. Dit vermoedelijk als gevolg van het niet op de meest gunstige plaats liggen van het maximum van de integrand. Hierna is getracht met dezelfde integratiemethode een oplossing te verkrijgen uit een overbepaald systeem, dus meer waarden voor u dan het aantal bispunten dat voor de integratie werd gebruikt. Ook dit leverde geen positief resultaat op. Het blijkt dus dat een doorgaans efficiënte methode als die van Hermite hier niet te gebruiken is.

Voor numerieke doeleinden is het echter niet altijd noodzakelijk om een oneigenlijke integraal als zodanig te behandelen. Willen we de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (3.3)$$

benaderen met een nauwkeurigheid δ , dan kan worden volstaan met het bepalen van

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.4)$$

mits voldaan is aan

$$\left| \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \right| < \delta \quad (3.5)$$

De integraal (3.4) kan m.b.v. de trapeziumregel of de formule van Simpson worden geëvalueerd. In principe is dit dus ook toe te passen op (3.2). Hiervoor zal het nodig zijn om na te gaan of het integratie interval redelijkerwijs tot een eindig interval is terug te brengen.

Het is duidelijk, dat de ware verdeling $f(v)$ smaller zal zijn dan de gemeten verdeling $g(u)$. Kunnen we dus het integratieinterval van $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du$ terugbrengen tot een eindig interval, dan zal dit zeker lukken voor $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv$.

Voor een normale verdeling met verwachting 0 en standaarddeviatie σ geldt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \approx 3 \cdot 10^{-5} \quad (3.6)$$

Voor een nauwkeurigheid $\delta = 6 \cdot 10^{-5}$ kunnen we dan schrijven

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-4\sigma}^{+4\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx + \delta \quad (3.7)$$

Daar $g(u) \sim N(0.500, 0.051)$ verdeeld is kan hiervoor het integratieinterval van $-\infty$ naar $+\infty$ in redelijk goede benadering worden vervangen door het integratie interval $[0.500 - 4 \times 0.051, 0.500 + 4 \times 0.051]$ ofwel $[0.30, 0.70]$. Het is te verwachten dat ditzelfde ook geldt voor het linkerlid van (3.2).

Kiezen we nu een numerieke integratiemethode met n basispunten v_j , dan zal, om het gewenste stelsel lineaire vergelijkingen te krijgen, deze methode n maal moeten worden toegepast, nl. voor n verschillende waarden u_i van u .

Hierbij moeten dan gelden: $0.3 \leq u_i, v_j \leq 0.7$.
 (3.2) gaat dan over in:

$$\sum_{j=1}^n C_j \exp \left[-43.672 (u_i - v_j)^2 \exp(5.60u_i) \right] f(v_j) = 2.098 \exp \left[-2.80u_i - \frac{(u_i - 0.500)^2}{0.0052} \right] \quad (3.8)$$

Het met (3.8) verkregen stelsel vergelijkingen blijkt echter zeer slecht geconditioneerd te zijn, doordat de meeste coëfficiënten nagenoeg gelijk zijn aan nul. Het maakt echter nog wel verschil uit hoe we de punten u_i en v_j kiezen. Hiertoe merken we op, dat het maximum van het linkerlid van (3.8) optreedt voor $u_i = v_j$, mits de waarden van de integratiecoëfficiënten C_j niet te sterk variëren. Deze eigenschap is uitermate

belangrijk voor de oplossing van het probleem. Maken we voor de integratie gebruik van de trapeziumregel, dan zijn we er van verzekerd dat C_j niet veel varieert (waarden 1 en 2). Zijn nu voor deze integratiemethode de basispunten u_j nodig, dan kiezen we voor v de waarden waarvoor geldt: $v_i = u_j$ voor $i=j$. Er wordt dan een coëfficiëntenmatrix verkregen met een overheersende diagonaal, hetgeen in het algemeen een prettige eigenschap is voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen.

In dit speciale geval is gebleken dat dit zelfs een stringente eis is voor het vinden van de oplossing. Zelfs uit deze, onder de gegeven omstandigheden optimaal opgebouwde coëfficiëntenmatrix, kon met de gebruikelijke Algol-procedures geen oplossing worden verkregen. De uitkomsten die hiermee werden verkregen bestonden uit een volkomen ongeordende getallenverzameling en daardoor was het ook niet mogelijk hierin verbetering aan te brengen door toevoeging van een correctieterm, zoals in het begin van dit verhaal is aangegeven.

De oplossing werd verkregen met relaxatie. Hierbij werd als beginschatting de functie $g(u)$ meegegeven. Bij relaxatie is het niet mogelijk een correctieterm in te voeren. Ondanks dit feit resulteerde deze methode in een oplossing die alleszins acceptabel was en waarin alleen merkbare ruis voorkwam in de staart van de verdeling.

Gewerkt is hierbij met 41 punten voor de integratie ($u_j = 0.29 + 0.01j$, $j = 1(1)41$). Gebleken is dat dit ongeveer het optimale aantal is in dit geval. Bij minder punten wordt de integratie te onnauwkeurig; bij meer punten wordt de ruis in de oplossing sterker.

Tabel 1 geeft de oplossing zoals die is verkregen op 41 basispunten. Dit resultaat werd al verkregen na 7 relaxaties. In fig. 1 is de oplossing weergegeven met weglating van de ruis in de staart.

Zoals te verwachten is de verdeling smaller dan de gemeten verdeling en is ze scheef.

4. Aanhangsel.

Het in dit verslag behandelde probleem zal veelal in omgekeerde vorm worden gepresenteerd:

Gegeven een meetinstrument A waarvan de verdeling van de meetfout bekend is en een grootheid X waarvan ook de verdeling bekend is. Wat zal dan de verdeling van de meetuitkomst zijn indien we X met A meten.

In deze vorm leent het probleem zich voor sampling met de computer. De gezochte verdeling is hier de som van twee bekende verdelingen en we kunnen steekproeven krijgen door steeds een steekproef te nemen uit de verdeling van X en een steekproef uit de verdeling van de meetfout van A hierbij op te tellen.

Een dergelijk proces kan op de EL X-8 worden uitgevoerd met de procedures SETRANDOM (a) en RANDOM. De eerste van deze twee kan beschouwd worden als een start-procedure. Ze wordt eenmaal aangeroepen met een getal a en is bedoeld om het proces zondig te kunnen reproduceren door weer een aanroep met hetzelfde getal a. Na de eenmalige aanroep van SETRANDOM wordt door iedere aanroep RANDOM een getal tussen 0 en 1 uit een nagenoeg homogene verdeling verkregen.

De transformatie naar een gestandaardiseerde normale verdeling kan als volgt geschieden. Met RANDOM kunnen we aan een variabele t' een waarde toe. Vervolgens nemen we $t = t' - 0.5$. De verwachting van t is nu gelijk aan nul. Heeft t de waarde a dan is de overschrijdingskans van a gelijk aan $q = P [t \geq a] = 0.5 - a$.

Is nu u normaal verdeeld met verwachting nul en standaarddeviatie gelijk aan één, dan geldt hiervoor, dat bij de overschrijdingskans q een abcis-waarde $u = u(q)$ behoort die bepaald is door

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u(q)}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (4.1)$$

Voor $0 < q \leq 0.5$ geeft Hastings [1] een benadering voor $u = u(q)$ van de gedaante

$$u(q) \approx \eta - (a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2) / (1 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3) \quad (4.2)$$

Hierin is $\eta = \sqrt{\log(1/q^2)}$.

Hiermee kan t getransformeerd worden naar u en wordt uit de homogene verdeling een normale verkregen.

Daar de benadering (4.2) geldt voor $0 < q \leq 0.5$ wordt, indien voor t een negatieve waarde wordt gevonden, i.p.v. q de waarde $1 - (0.5 - q) = 0.5 + q$ genomen. De hiermee verkregen abcis-waarde wordt vervolgens tegengesteld genomen.

Willen we nu i.p.v. naar een gestandaardiseerde normale verdeling transformeren naar een normale verdeling met verwachting μ en standaarddeviatie σ , dan wordt u nog getransformeerd met $y = \mu + \sigma u$.

De hier geschetste methode is toegepast op de verdelingen (1.1) en (1.3), waarbij de standaarddeviatie van de meetfout gelijk aan (1.2) werd genomen.

Dit gaf 2 series uitkomsten. elk van 15000 waarden en wel

I De waarden zonder dat een fout was bijgeteld (oorspronkelijke verdeling).

II De waarden met een fout bijgetelde (gesimuleerde meetuitkomsten).

Beide series werden getransformeerd volgens $u = \frac{X - 0.500}{0.051}$ en daarna

ingedeeld in 47 klassen met breedte 0.2 plus 2 restklassen.

Na deze transformatie moet I dus een steekproef opleveren uit een gestandaardiseerde normale verdeling. Een χ^2 -test hierop toegepast gaf $\chi^2 = 31.72$ met $\nu = 32$. Hierbij behoort een overschrijdingskans $P = 51\%$. Voor deze test werd de klasseindeling tussen -3.1 en $+3.1$ gehandhaafd, terwijl alles beneden -3.1 evenals alles boven 3.1 elk tot één klasse werd samengevoegd.

In fig. 2 zijn de gevonden verdelingen uitgezet, terwijl in tabel 2 de numerieke waarden zijn weergegeven.

Uit dit voorbeeld moge blijken, dat ook voor dergelijke experimenten de computer een uiterst bruikbaar instrument is.

[1] Cecil Hastings, Approximations for Digital Computers.

17-8-'67

tabel 1

v	f(v)	g(v)	v	f(v)	g(v)
0.30	- 0.02	0.00	0.50	+ 9.06	7.82
0.31	+ 0.04	0.01	0.51	+ 8.69	7.67
0.32	+ 0.03	0.02	0.52	+ 7.97	7.24
0.33	+ 0.02	0.03	0.53	+ 6.99	6.58
0.34	- 0.01	0.06	0.54	+ 5.87	5.75
0.35	- 0.06	0.10	0.55	+ 4.73	4.84
0.36	- 0.13	0.18	0.56	+ 3.67	3.91
0.37	- 0.20	0.30	0.57	+ 2.73	3.05
0.38	- 0.23	0.49	0.58	+ 1.95	2.28
0.39	- 0.17	0.76	0.59	+ 1.35	1.65
0.40	+ 0.07	1.14	0.60	+ 0.89	1.14
0.41	+ 0.54	1.65	0.61	+ 0.57	0.76
0.42	+ 1.29	2.28	0.62	+ 0.35	0.49
0.43	+ 2.33	3.05	0.63	+ 0.21	0.30
0.44	+ 3.59	3.91	0.64	+ 0.12	0.18
0.45	+ 4.98	4.84	0.65	+ 0.07	0.10
0.46	+ 6.36	5.75	0.66	+ 0.03	0.06
0.47	+ 7.58	6.58	0.67	+ 0.02	0.03
0.48	+ 8.49	7.24	0.68	+ 0.01	0.02
0.49	+ 9.00	7.67	0.69	+ 0.00	0.01
			0.70	+ 0.00	0.00

f(v) is de gemeten verdeling
g(v) is de verdeling zonder meetfouten, dus
de oplossing van het gestelde probleem.

tabel 2

Klasse	I	II	Klasse	I	II
< -4.7	0	1	0.1 - 0.3	1196	1087
-4.7 - -4.5	0	2	0.3 - 0.5	1101	1040
-4.5 - -4.3	0	1	0.5 - 0.7	989	970
-4.3 - -4.1	0	1	0.7 - 0.9	872	853
-4.1 - -3.9	0	7	0.9 - 1.1	721	704
-3.9 - -3.7	3	10	1.1 - 1.3	606	628
-3.7 - -3.5	2	13	1.3 - 1.5	409	486
-3.5 - -3.3	5	17	1.5 - 1.7	351	421
-3.3 - -3.1	10	30	1.7 - 1.9	236	319
-3.1 - -2.9	11	35	1.9 - 2.1	158	212
-2.9 - -2.7	21	61	2.1 - 2.3	128	165
-2.7 - -2.5	41	87	2.3 - 2.5	70	99
-2.5 - -2.3	84	129	2.5 - 2.7	43	77
-2.3 - -2.1	112	165	2.7 - 2.9	25	36
-2.1 - -1.9	177	229	2.9 - 3.1	11	27
-1.9 - -1.7	223	257	3.1 - 3.3	7	5
-1.7 - -1.5	351	384	3.3 - 3.5	0	9
-1.5 - -1.3	488	440	3.5 - 3.7	0	1
-1.3 - -1.1	566	559	3.7 - 3.9	0	0
-1.1 - -0.9	699	688	3.9 - 4.1	1	0
-0.9 - -0.7	832	788	4.1 - 4.3	0	1
-0.7 - -0.5	986	924	4.3 - 4.5	0	0
-0.5 - -0.3	1125	953	4.5 - 4.7	0	0
-0.3 - -0.1	1176	1042	> 4.7	0	0
-0.1 - +0.1	1164	1037			

- I Geeft het resultaat van 15000 steekproeven uit een gestandaardiseerde normale verdeling.
- II Geeft het resultaat dat verkregen is door bij elke steekproef van I een fout te tellen. Deze fout is eveneens verkregen als steekproef uit een normale verdeling met verwachting gelijk aan nul, terwijl de standaarddeviatie een functie is van de waarde van de steekproef van I.

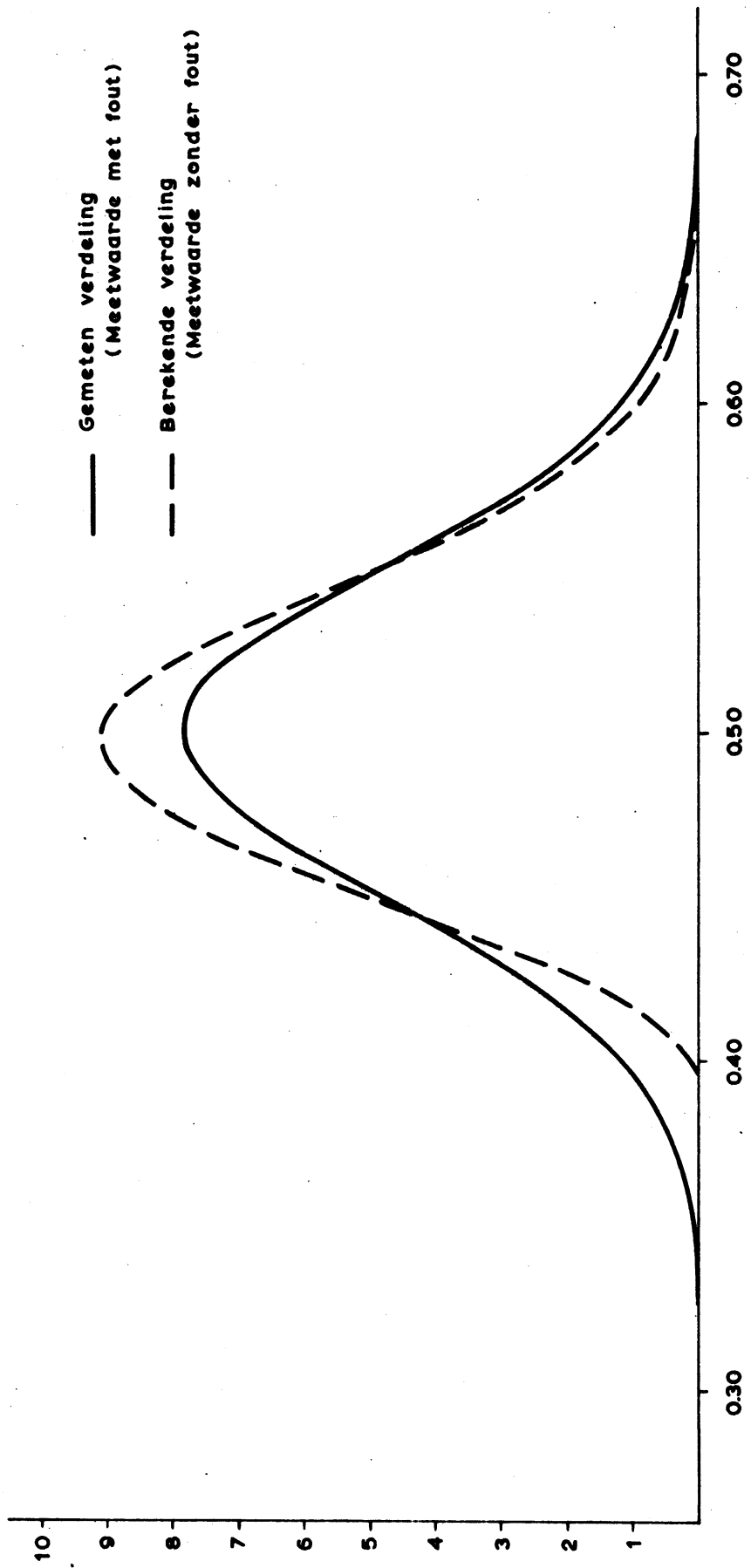


FIG. 1

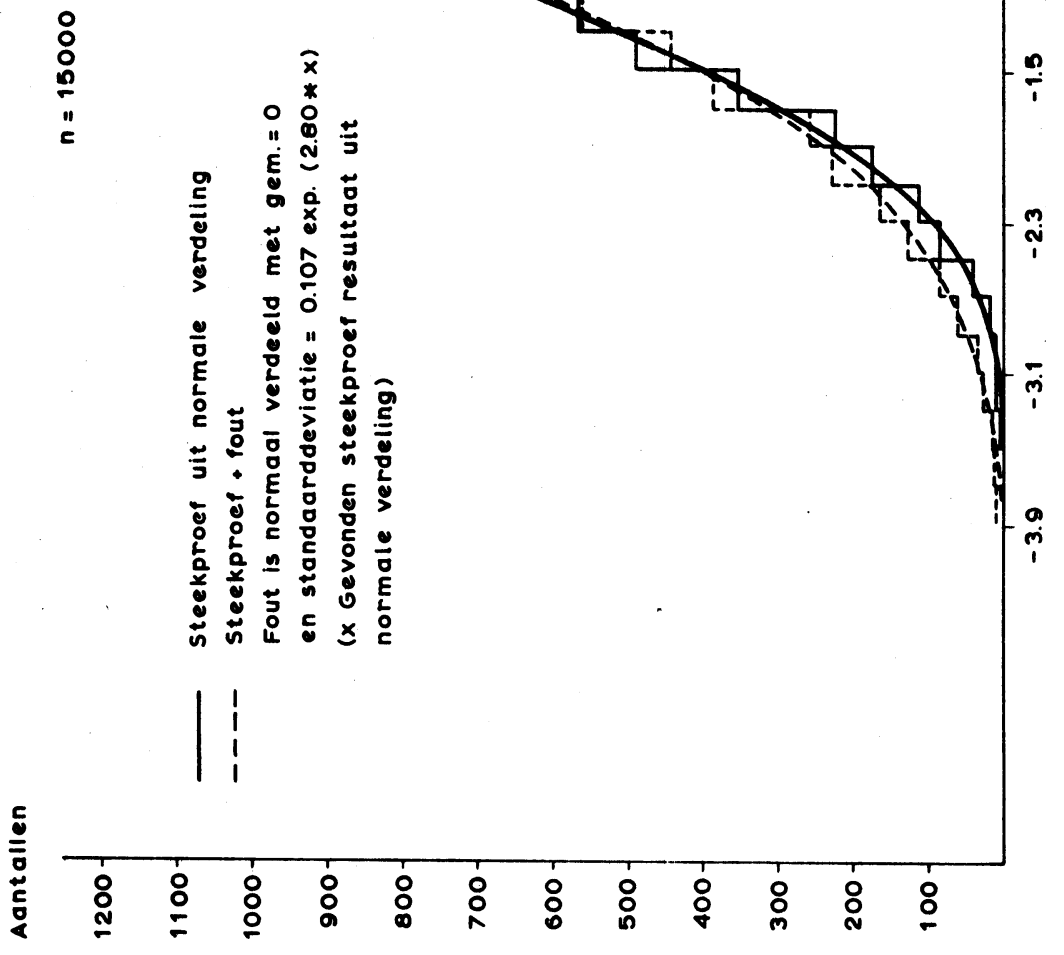


Fig. 2