

17 FEB. 1969

KONINKLIJK NEDERLANDS  
METEOROLOGISCH INSTITUUT  
DE BILT

VERSLAGEN

V-217

Temperatuurverdeling aan de kust bij lineair met  
de afstand toenemende diepte

door

I. Claessen

De Bilt, 1969

Kon. Ned. Meteor. Inst.  
De Bilt

Publikationsnummer: K.N.M.I. V 217-I

Temperatuurverdeling aan de kust bij lineair met  
de afstand toenemende diepte

§ 1 Inleiding

Gegeven zij een stuk zee, waarin de diepte lineair met de afstand tot de kust toeneemt (zie fig. 1).

Tengevolge van turbulente diffusie is overal en te allen tijde de temperatuur van oppervlakte tot bodem gelijk.

De uitwisseling met de atmosfeer bewerkstelligt een jaarlijkse energiegolf die, afhankelijk van de afstand  $x$  tot de kust, ten goede komt aan een langere of kortere kolom water.

De temperatuurvereffening in de  $x$ -richting wordt bepaald door een turbulente diffusie-coëfficiënt die constant genomen wordt ( $B$  in de formule).

De temperatuurverdeling wordt nu beschreven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \frac{B}{x} \sin \omega t, \quad a \text{ "materiaal-constante"}$$

Omdat  $x=0$  hier een singulariteit is schrijven we in het rechterlid liever  $\frac{B}{x+\alpha} \sin \omega t$ . De fysische interpretatie van  $\alpha$  is dat we de oorsprong kiezen in het punt  $x = \alpha$ , op korte afstand van de kust (zie fig. 1).

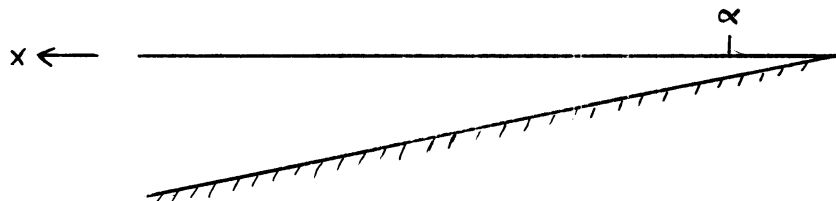


fig. 1

Op een willekeurig tijdstip, dat we als  $t = 0$  definiëren, moet  $\theta$  gegeven zijn als functie van de afstand  $x$ :  $\theta(x,t) = f(x)$  op  $t = 0$ .

Voor  $x = 0$  zij  $\theta(x,t) = \varphi_1(t)$  en voor  $x = 1$  zij  $\theta(x,t) = \varphi_2(t)$ , zodat het probleem, met rand- en beginvoorwaarden er als volgt uitziet:

$$(2) \quad a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{B}{x+\alpha} \sin \omega t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$(3) \quad \theta(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$(4) \quad \theta(0,t) = \varphi_1(t), \quad t > 0$$

$$(5) \quad \theta(1,t) = \varphi_2(t), \quad t > 0$$

§ 2 Oplossing van de partiële differentiaalvergelijking

1e methode

Bovenstaande vergelijking is een parabolische, inhomogene vergelijking met inhomogene rand- en beginvoorwaarden. We splitsen deze in een inhomogene vergelijking met homogene rand- en beginvoorwaarden, en een homogene vergelijking met inhomogene rand- en beginvoorwaarden.

$$(6) \quad \theta(x,t) = F(x,t) + G(x,t) \quad \text{met}$$

$$(7) \quad a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{B}{x+a} \sin \omega t$$

$$(8) \quad F(0,t) = 0 \quad \text{voor } t > 0$$

$$(9) \quad F(1,t) = 0 \quad \text{voor } t > 0$$

$$(10) \quad F(x,0) = 0 \quad \text{voor } x > 0 \quad \text{en}$$

$$(11) \quad a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

$$(12) \quad G(0,t) = \varphi_1(t) \quad \text{voor } t > 0$$

$$(13) \quad G(1,t) = \varphi_2(t) \quad \text{voor } t > 0$$

$$(14) \quad G(x,0) = f(x) \quad \text{voor } x > 0$$

Op vergelijking (7) t/m (10) passen we Laplace- transformatie toe. Er ontstaat dan het volgende stelsel:

$$(15) \quad a \bar{F}_{xx}(x,s) - s \bar{F}(x,s) = \frac{B}{x+a} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{waarin } \bar{F}(x,s) = L F(x,t)$$

$$(16) \quad x = 0 : \bar{F}(x,s) = 0$$

$$(17) \quad x = 1 : \bar{F}(x,s) = 0$$

Voor dit probleem zoeken we de functie van Green. Hiertoe hebben we twee onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijking nodig, die elk aan één van beide randvoorwaarden voldoen. Dit blijken te zijn

$$F_1 = \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x \quad \text{en} \quad F_2 = \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-x). \quad \text{De functie van Green is dan:}$$

$$(18) \quad G(x, \xi, s) = -w^{-1} \cdot F_1(x, s) \cdot F_2(\xi, s) \text{ voor } x \leq \xi \\ = -w^{-1} \cdot F_1(\xi, s) \cdot F_2(x, s) \text{ voor } x \geq \xi$$

w is de determinant van Wronsky voor  $F_1$  en  $F_2$ .

Na enig rekenwerk vindt men

$$(19) \quad G(x, \xi, s) = \frac{\sinh x \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-\xi)}{\sqrt{\frac{s}{a}} \sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}} \text{ voor } x \leq \xi \\ = \frac{\sinh \xi \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-x)}{\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}} \text{ voor } x \geq \xi$$

$$(20) \text{ Dan is } \bar{F}(x, s) = \int_0^1 G(x, \xi, s) \left\{ -\frac{B}{\xi+\alpha} - \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \right\} \frac{1}{a} d\xi$$

Het terugzoeken van de object-functie gaat als volgt.

$G(x, \xi, s)$ , beschouwd als functie van s, heeft enkelvoudige polen in de

punten van  $\sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}$ , dus voor  $s = -\frac{an^2\pi^2}{1^2}$ ,  $n \geq 1$ .

Het residu van  $\frac{\sinh x \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-\xi)}{\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}}$   $\frac{1}{\xi+\alpha}$  is

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{an^2\pi^2}{1^2}} \frac{(s + \frac{an^2\pi^2}{1^2}) \sinh x \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-\xi)}{\sqrt{\frac{s}{a}} \sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}}$$

Toepassing van de regel van De l'Hospital geeft  $\frac{2a}{1} \sin \frac{n\pi x}{1} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{1}$

Dit geldt voor  $x < \xi$  en eveneens voor  $x > \xi$

(20) wordt nu, gebruik makend van de zg. complexe omkeerformule:

$$(21) \quad -\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{B}{a} \int_0^1 \frac{\sinh x \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-\xi)}{\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \sinh 1 \sqrt{\frac{s}{a}}} \frac{1}{\xi+\alpha} d\xi =$$

$$L\{\sin \omega t\} \cdot L \left\{ -2 \frac{B}{a} \frac{1}{1} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\tan^2 \pi^2 / 1^2} \sin \frac{n\pi x}{1} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{1} \frac{d\xi}{\xi+\alpha} \right\}$$

Toepassing van de concolutieregels levert:

$$(22) \quad \bar{F}(x,s) = L\left\{-2 \frac{B}{l} \int_0^t \sin \omega t \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(t-\tau) a n^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{l} \frac{1}{\xi+a} d\xi d\tau\right.$$

zodat uiteindelijk

$$(23) \quad F(x,t) = -2 \frac{B}{l} \int_0^t \sin \omega t \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(t-\tau) a n^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \xi}{l} \frac{1}{\xi+a} d\xi d\tau$$

Een oplossing van (11) t/m (14) vindt men in (1) blz. 108 ev.

De gevolgde procedure volgt hier in het kort.

Splits  $G$  in  $G = U + V$ , waarbij  $U$  en  $V$  beide aan (11) voldoen.

Voor  $x = 0$  en  $x = 1$ ,  $U = 0$ , voor  $t = 0$   $U = f(x)$ ,

voor  $x = 0$ ,  $V = \mathcal{Y}_1(t)$ , voor  $x = 1$ ,  $V = \mathcal{Y}_2(t)$ , voor  $t = 0$ ,  $V = 0$

Gemakkelijk vindt men voor  $U$ :

$$(24) \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t} A_n \sin \frac{\pi}{l} n x$$

De voorwaarde voor  $t = 0$  geeft:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  met  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^1 f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$  zodat

$$(24a) \quad U = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t} \int_0^1 f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} d\xi .$$

Om  $V$  te vinden verdelen we het tijdsinterval van 0 tot  $t$  in  $n$  delen d.m.v.

$t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  en stellen

$$(25) \quad V(n) = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}, \text{ waarbij } V_v \text{ voldoen aan:}$$

voor  $x = 0$  en  $t_v < t < t_v + 1$  is :  $V = \mathcal{Y}_1(t_v)$

voor  $x = 0$  en andere  $t$ -waarden :  $V_v = 0$

voor  $x = 1$  en  $t_v < t < t_v + 1$  is :  $V_v = \mathcal{Y}_2(t_v)$

voor  $x = 1$  en andere  $t$ -waarden :  $V_v = 0$

voor  $t = 0$ ,  $0 < x < 1$  :  $V_v = 0$

Laat tenslotte  $n$  onbepaald toenemen.

Ter bepaling van  $V_v$  voeren we in  $X(x,t)$  als volgt:

$$(26) \quad \text{voor } t \leq 0 \text{ is } X(x,t) = 0$$

$$\text{voor } t > 0, 0 \leq x \leq 1 \text{ is } X(x,t) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$V_v$  wordt dan:

$$(27) \quad V_v = \mathcal{Y}_1(t_v) \{X(1-x, t-t_v) - X(1-x, t-t_{v+1})\} + \\ + \mathcal{Y}_2(t_v) \{X(x, t-t_v) - X(x, t-t_{v+1})\} \quad \text{of} \\ V_v = \mathcal{Y}_1(t_v) \frac{\partial X(1-x, t-t_v - \theta_v \Delta t_v)}{\partial t} \Delta t_v + \\ + \mathcal{Y}_2(t_v) \frac{\partial X(x, t-t_v - \theta'_v \Delta t_v)}{\partial t} \Delta t_v, \quad \Delta t_v = t_{v+1} - t_v$$

Substitutie in  $V(n)$  en grensovergang levert:

$$(28) \quad v = \int_0^t \mathcal{Y}_1(\tau) \frac{\partial X(1-x, t-\tau)}{\partial t} d\tau + \int_0^t \mathcal{Y}_2(\tau) \frac{\partial X(x, t-\tau)}{\partial t} d\tau \quad (t > 0)$$

Uitwerking levert:

$$(29) \quad v = -\frac{2a\pi}{l^2} \int_0^t \mathcal{Y}_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} d\tau - \\ - \frac{2a\pi}{l^2} \int_0^t \mathcal{Y}_2(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2}(t-\tau)} \sin \frac{n\pi(1-x)}{l} d\tau$$

Optellen van (23), (24a) en (29) geeft als oplossing voor  $\theta(x,t)$ :

$$(30) \quad \theta(x,t) = -2 \frac{B}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^1 \sin \frac{n\pi \xi}{l} \frac{1}{\xi+a} d\xi \int_0^t e^{-(t-\tau)an^2\pi^2/l^2} \sin \omega \tau d\tau \\ + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(an^2\pi^2 t/l^2)} \int_0^1 f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} d\xi \\ + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2a\pi n}{l^2} \int_0^t e^{-(an^2\pi^2/l^2)(t-\tau)} \mathcal{Y}_1(\tau) d\tau \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2a\pi n}{l^2} \int_0^t e^{-(an^2\pi^2/l^2)(t-\tau)} \mathcal{Y}_2(\tau) d\tau \cdot \sin \frac{n\pi(1-x)}{l}$$

Of iets compacter:

$$(30a) \quad \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \frac{2}{l} e^{-tn^2\pi^2 a/l^2} \int_0^1 f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^t e^{-(t-\tau)n^2\pi^2 a/l^2} \left( \frac{2B}{l} \sin \omega \tau \int_0^1 \sin \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) \frac{1}{\xi+a} d\xi + \frac{2a\pi n}{l^2} (\mathcal{Y}_1(\tau) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^n \mathcal{Y}_2(\tau)) d\tau \right) \right\}$$

§ 3 Verificatie

We tonen nu aan dat de gevonden oplossing voldoet aan (2), (3), (4) en (5).

Hiertoe schrijven we (30) als  $\theta(x,t) = I + II + III + IV$

Voor  $t = 0$  is  $I = III = IV = 0$  zodat

$$\theta(x,0) = \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{1} \sin \frac{n\pi x}{1} d\xi \text{ en dit is de}$$

Fourier-reeksontwikkeling van  $f(x)$ , waarmee aan (3) voldaan is.

Hieruit volgen voor  $f(x)$  de volgende, zg. Dirichlet-voorwaarden: 1e  $f(x)$

begrensd; 2e  $f(x)$  heeft hoogstens eindig aantal discontinuïteitpunten;

3e  $f(x)$  heeft hoogstens eindig aantal extrema.

Beschouw nu de tweede term uit het rechterlid van (28)

$$W = \int_0^t \psi_2(\tau) \frac{\partial X(x,t-\tau)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \psi_2(t-\tau) \frac{\partial X(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

Partiëleintegratie geeft i.v.m. het feit dat  $X(x,0) = 0$  :

$$(31) \quad W = \psi_2(0) X(x,t) + \int_0^t \psi_2'(t-\tau) X(x,\tau) d\tau$$

$$(32) \Rightarrow W(0,t) = 0 \text{ en } W(1,t) = \psi_2(0) + \int_0^t \psi_2'(t-\tau) d\tau = \psi_2(t)$$

Op dezelfde wijze is aan te tonen dat de eerste term van het rechterlid van (28) voor  $x = 0$  de waarde  $\psi_1(t)$  en voor  $x = 1$  de waarde 0 aanneemt.

Aangezien voor  $x = 0$  en  $x = 1$  de termen I en II uit (30) gelijk aan nul zijn is hiermede aan de randvoorwaarden (4) en (5) voldaan.

Tenslotte laten we zien dat (30) aan de differentiaalvergelijking (2) voldoet.

Zij  $L$  de differentiaal-operator  $a \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$ , dan is aan te tonen dat

$$(33) \quad L(I+II+III+IV) = L I + L II + L III + L IV = \frac{B}{x+a} \sin \omega t$$

Uit (31) volgt:

$$(34) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \psi_2(0) \frac{\partial X(x,t)}{\partial t} + \psi_2'(0) X(x,t) + \int_0^t \psi_2''(t-\tau) X(x,\tau) d\tau$$

$$\text{en } a \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = a \psi_2(0) \frac{\partial^2 X(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t \psi_2'(t-\tau) a \frac{\partial^2 X(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau$$



Wegens  $a \frac{\partial^2 X(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial t}$  en partiële integratie van de laatste integraal:

$$\int_0^t \mathcal{Y}_2^1(t-\tau) \frac{\partial X(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau = \mathcal{Y}_2^1(0) X(x,t) + \int_0^t \mathcal{Y}_2^{''}(t-\tau) X(x,\tau) d\tau$$

blijkt dat  $\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  of  $LW = 0$

Dus ook  $LIV = LIII + LIV = 0$

Hieruit volgt voor  $\mathcal{Y}_1(t)$  en  $\mathcal{Y}_2(t)$  de eis dat deze functies twee maal differentieerbaar zijn.

Voor de berekening van  $LI$  maken we gebruik van de volgende stelling (zie (2) blz. 698).

Indien  $F_1(t)$  en  $F_2(t)$  aan passende voorwaarden voldoen, geldt:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F_1(t-\tau) \cdot F_2(\tau) d\tau = \int_0^t F_1'(t-\tau) \cdot F_2(\tau) d\tau + F_1(0+) \cdot F_2(t)$$

zodat:

$$\begin{aligned} LI &= + \frac{2B}{1} \int_0^t \sin \omega \tau \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a n^2 \pi^2}{1^2} e^{-(t-\tau) a n^2 \pi^2 / 1^2} d\tau \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{1}\right) \frac{1}{\xi + \alpha} d\xi \\ &\quad - \frac{2B}{1} \int_0^t \sin \omega \tau \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a n^2 \pi^2}{1^2} e^{-(t-\tau) a n^2 \pi^2 / 1^2} d\tau \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{1}\right) \frac{1}{\xi + \alpha} d\xi \\ &\quad + \frac{2B}{1} \sin \omega t \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{1}\right) \frac{1}{\xi + \alpha} d\xi d\tau \\ &= \frac{B \sin \omega t}{x + \alpha} \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt omdat  $\frac{1}{x+\alpha}$  aan de eerdergenoemde Dirichlet-voorwaarden voldoet.

$$LII = \left( a \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dt} \right) \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a n^2 \pi^2 t}{1^2}} \int_0^1 f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) d\xi = 0$$

waarmee (33) bewezen is.

#### § 4 2e methode

Men kan ook meteen Laplace-transformatie toepassen op het stelsel (2)

t/m (5) en verkrijgt dan het volgende stelsel:

$$(35) \quad 0 < x < 1: aU_{xx}(x,s) - sU(x,s) = \frac{B}{x+a} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - f(x)$$

$$\text{met } U(x,s) = L \theta(x,t)$$

$$(36) \quad x = 0 : U = v_1(s) \text{ met } v_1(s) = L \mathcal{Y}_1(t)$$

$$(37) \quad x = 1 : U = v_2(s) \text{ met } v_2(s) = L \mathcal{Y}_2(t)$$

Splits  $U(x,s)$  in  $U(x,s) = F(x,s) + G(x,s)$  waarbij  $F$  en  $G$  aan de volgende voorwaarden voldoen

$$(38) \quad 0 < x < 1: aF_{xx}(x,s) - sF(x,s) = \frac{B}{x+a} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - f(x)$$

$$x = 0: F = 0$$

$$x = 1: F = 0$$

en

$$(39) \quad 0 < x < 1: aG_{xx}(x,s) - sG(x,s) = 0$$

$$x = 0: G = v_1(s)$$

$$x = 1: G = v_2(s)$$

Het stelsel (38) is weer op te lossen m.b.v. de functie van Green. Deze blijkt identiek te zijn aan (19), zodat

$$(40) \quad F(x,s) = \int_0^1 g(x,\xi,s) \left\{ -\frac{B}{\xi+a} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + f(\xi) \right\} \frac{1}{a} d\xi$$

De algemene oplossing van (39) vindt men op triviale wijze:

$$(41) \quad G(x,s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x}$$

Substitutie van de randvoorwaarden in (41) en enige herleiding levert:

$$(42) \quad G(x,s) = \frac{v_2 \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x + v_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-x)}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} 1} = G_1 + G_2$$

Het terugzoeken van de object-functie van (40) is vrijwel gelijk aan de bewerkingen, beschreven door de formules (20) t/m (23). Daarom laten we direct het resultaat volgen.

$$(43) \quad F(x,s) = L \left\{ -2 \frac{B}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t e^{-(t-\tau)n^2\pi^2 a/l^2} \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \frac{1}{\xi+a} \sin n\omega\tau \, d\tau \, d\xi + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-t \frac{an^2\pi^2}{l^2}} \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) f(\xi) \, d\xi \right\}$$

$G_1(x,s)$  heeft polen van de eerste orde in  $s = -\frac{an^2\pi^2}{l^2}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ )

Het residu van  $\frac{\sinh \frac{s}{a} x}{\sinh \frac{s}{a} l}$  is:

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{an^2\pi^2}{l^2}} \frac{\left\{s + \left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}\right)\right\} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l} = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\text{zodat } \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l} = L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot e^{-\frac{an^2\pi^2}{l^2} t} \right\}$$

Toepassing van de convolutie-regel geeft:

$$(44) \quad G_1(x,s) = L \left\{ \varphi_2(t) \right\} \cdot L \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot e^{-\frac{an^2\pi^2}{l^2} t} \right\}$$

$$= L \left\{ \int_0^t \varphi_2(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{l^2} (t-\tau)} \, d\tau \right\}$$

$$= -L \left\{ \int_0^t \varphi_2(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi(1-x)}{l}\right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{l^2} (t-\tau)} \, d\tau \right\}$$

analoog geldt:

$$(45) \quad G_2(x,s) = -L \left\{ \int_0^t \varphi_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2an\pi}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{l^2} (t-\tau)} \, d\tau \right\}$$

Optellen van (43), (44) en (45) leidt weer tot (30)

### § 5 3e methode

Tot de oplossing van (11) t/m (14) kunnen we ook komen door toepassing van het theorema van Duhamel.

Dit luidt voor 3-dimensionale problemen:

Als  $G = F(x,y,z,\lambda,t)$  de temperatuur in een medium is in  $(x,y,z)$  op tijdstip  $t$ , en de begin-temperatuur is nul, terwijl de oppervlak-temperatuur  $\emptyset(x,y,x,\lambda)$  is, dan is de oplossing van het probleem, waarbij de begin-

temperatuur nul is en de oppervlak-temperatuur  $\vartheta(x, y, z, t)$  gegeven door

$$G = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, \lambda, t-\lambda) d\lambda \quad (\text{zie (3), blz. 18 ev.})$$

Splits  $G(x, t)$  in  $G(x, t) = u + w$  met

$$(46) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1) \\ u &= 0 \quad \text{voor } x = 0, x = 1 \\ u &= f(x) \quad \text{voor } t = 0 \end{aligned}$$

$$(47) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1) \\ w &= \mathcal{Y}_1(t) \quad \text{voor } x = 0 \\ w &= \mathcal{Y}_2(t) \quad \text{voor } x = 1 \\ w &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \end{aligned}$$

Door scheiding der variabelen of m.b.v. Laplace-transformatie vindt men als oplossing van (46).

$$(48) \quad u = \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 \pi^2 t / l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \cdot \int_0^1 f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{1}\right) d\xi$$

(47) lossen we op m.b.v. bovenstaand theorema.

De temperatuur op tijdstip  $t$  is, als de temperatuur op  $t = \lambda$  overal nul is, en de eindpunten gehouden worden op  $\vartheta_1(\lambda)$  en  $\vartheta_2(\lambda)$  van  $t = \lambda$  tot  $t = t$ , gegeven door:

$$(49) \quad \begin{aligned} w &= \mathcal{Y}_1(\lambda) \left\{ 1 - \frac{x}{1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-an^2 \pi^2 (t-\lambda) / l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \right\} + \\ &+ \mathcal{Y}_2(\lambda) \left\{ \frac{x}{1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \cdot e^{-an^2 \pi^2 (t-\lambda) / l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \right\} \end{aligned}$$

Als de randtemperaturen  $\mathcal{Y}_1(t)$  en  $\mathcal{Y}_2(t)$  zijn, krijgen we

$$(50) \quad w = \int_0^t \left\{ \mathcal{Y}_1(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t-\lambda) + \mathcal{Y}_2(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F_2(x, t-\lambda) \right\} d\lambda$$

$$\text{waar } F_1(x, t-\lambda) = 1 - \frac{x}{1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-an^2 \pi^2 (t-\lambda) / l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)$$

$$F_2(x, t-\lambda) = \frac{x}{1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \cdot e^{-an^2 \pi^2 (t-\lambda) / l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)$$

$$(51) \quad W = \frac{2a\pi}{l^2} \sum_1^{\infty} n e^{-an^2\pi^2 t/l^2} \int_0^1 e^{+an^2\pi^2 \lambda/l^2} \{ \varphi_1(\lambda) - (-1)^n \varphi_2(\lambda) \} d\lambda$$

$$G(x,t) = u + w$$

$\theta(x,t) = F(x,t) + G(x,t)$ , waarbij de oplossing van  $G(x,t)$  in §2 gegeven is.

### § 6 Discussie van de oplossing

De eerste term in het rechterlid van (30) kan geïntegreerd worden. Na uitvoering hiervan wordt (30) ( $w$ ) wordt in het volgende als  $w$  geschreven)

$$(52) \quad \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ -2 \frac{B}{l} \int_0^1 \sin \frac{n\pi \xi}{l} \frac{1}{\xi + a} d\xi \right. \\ \cdot \frac{l^2 n^2 \pi^2 a \sin wt - l^4 w \cos wt + l^4 w \cdot e^{-tn^2 \pi^2 a/l^2}}{a^2 n^4 \pi^4 + w l^4} \\ \left. - 2 \frac{an\pi}{l^2} \int_0^t e^{-(t-\tau)n^2 \pi^2 a/l^2} (\varphi_1(\tau) - (-1)^n \varphi_2(\tau)) d\tau \right. \\ \left. + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 \pi^2 t/l^2} \int_0^1 f(\xi) \sin \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) d\xi \right.$$

De laatste term in het rechterlid van (52) gaat voor grote  $t$  naar nul, zodat de beginvoorwaarde tenslotte geen rol meer speelt.

Eveneens naar nul gaat de exponentiële term in de eerste term van het rechterlid, zodat voor grote  $t$  de oplossing er als volgt uit ziet:

$$(53) \quad \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \left\{ - \frac{2B}{l} \int_0^1 \sin \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) \frac{1}{\xi + a} d\xi \cdot \frac{l^2 n^2 \pi^2 a \sin wt - l^4 w \cos wt}{n^4 \pi^4 a + l^4 w} \right. \\ \left. - \frac{2an\pi}{l^2} \int_0^t e^{-(t-\tau)n^2 \pi^2 a/l^2} (\varphi_1(\tau) - (-1)^n \varphi_2(\tau)) d\tau \right\}$$

$\varphi_1(\tau)$  en  $\varphi_2(\tau)$  moeten periodieke functies van de tijd zijn, daar de temperatuur overal aan de seizoenswisseling onderhevig is.

Ter illustratie kiezen we:

$$(54) \quad \varphi_1(t) = A_1 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + B_1 \quad \text{en} \quad \varphi_2(t) = A_2 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + B_2$$

$A_1$  en  $A_2$  zijn de amplituden t.o.v. het jaargemiddelde,  $B_1$  en  $B_2$  zijn de jaargemiddelden van de temperatuur. De indices 1 en 2 duiden de situatie aan resp. aan de kust en op afstand  $l$  van de kust.

De factor  $-\frac{\pi}{2}$  in  $\varphi_1(t)$  is een gevolg van het feit dat de fase van de oppervlakte-temperatuur ongeveer 3 maanden achterloopt bij die van de door de zon veroorzaakte energie-golf.

Ten gevolge van de warmte-geleiding loopt de fase van  $\varphi_2(t)$  weer ongeveer een maand achter t.o.v. de temperatuur aan de kust  $\varphi_1(t)$ .

Na substitutie van (54) in (53) kan de tweede term van het rechter lid van (53) geïntegreerd worden:

$$\begin{aligned} & \frac{2an\pi}{l^2} \int_0^t e^{-(t-\tau)n^2\pi^2 a/l^2} \{ (-A_1 \cos \omega\tau + B_1) - (-1)^n (A_2 \sin(\omega\tau - \frac{2\pi}{3}) + B_2) \} d\tau \\ &= \frac{2an\pi}{l^2} e^{-tn^2\pi^2 a/l^2} \int_0^t e^{\tau n^2\pi^2 a/l^2} \{ -A_1 \cos \omega\tau + B_1 - (-1)^n (-\frac{1}{2}A_2 \sin \omega\tau - \frac{1}{2}\sqrt{3}A_2 \cos \omega\tau \\ & \quad + B_2) \} d\tau \\ &= \frac{2an\pi}{l^2} e^{-tn^2\pi^2 a/l^2} \int_0^t e^{\tau n^2\pi^2 a/l^2} \{ (-A_1 + (-1)^n \frac{1}{2}\sqrt{3}A_2) \cos \omega\tau + B_1 - (-1)^n B_2 + \\ & \quad + (-1)^{n+1} \frac{1}{2}A_2 \sin \omega\tau \} d\tau = \end{aligned}$$

$$\frac{2an\pi}{l^2} e^{-tn^2\pi^2 a/l^2} \left[ (-A_1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2}\sqrt{3}A_2) \left\{ \frac{e^{\tau n^2\pi^2 a/l^2}}{\frac{n^2\pi^2 a}{4l^2} + \omega^2} \left( \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} \cos \omega\tau + \omega \sin \omega\tau \right) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{n^2\pi^2 a/l^2}{\frac{n^2\pi^2 a}{4l^2} + \omega^2} \right] + (B_1 - (-1)^n B_2) \frac{1}{n^2\pi^2 a} (e^{tn^2\pi^2 a/l^2} - 1) +$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^n \frac{1}{2} A_2 \left[ \frac{e^{tn^2 \pi^2 a / l^2}}{\frac{n^4 \pi^4 a^2}{1^4} + w^2} \left( \frac{n^2 \pi^2 a}{1^2} \sin wt - w \cos wt \right) + \frac{w}{\frac{n^4 \pi^4 a^2}{1^4} + w^2} \right] = \\
 & \frac{2an\pi/l^2 (-A_1 + (-1)^n \frac{1}{2} \sqrt{3} A_2) \left( \frac{n^2 \pi^2 a}{1^2} \cos wt + w \sin wt \right)}{\frac{n^4 \pi^4 a^2}{1^4} + w^2} + \frac{2an\pi}{1^2} \frac{1^2}{n^2 \pi^2 a} (B_1 - (-1)^n B_2) \\
 & + \frac{\frac{2an\pi}{1^2} (-1)^n \frac{1}{2} A_2 \left( \frac{n^2 \pi^2 a}{1^2} \sin wt - w \cos wt \right)}{\frac{n^4 \pi^4 a^2}{1^4} + w^2} = \\
 & \frac{2an\pi \{ (-A_1 + (-1)^n \frac{1}{2} \sqrt{3} A_2) (n^2 \pi^2 a \cos wt + l^2 w \sin wt) + (-1)^n \frac{1}{2} A_2 (n^2 \pi^2 a \sin wt - l^2 w \cos wt) \}}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} \\
 & + \frac{2}{n\pi} (B_1 - (-1)^n B_2)
 \end{aligned}$$

zodat (53) tenslotte wordt:

$$\begin{aligned}
 (54) \quad \theta(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \frac{1}{\frac{n^4 \pi^4 a^2}{1^4} + l^4 w^2} \cdot \left[ - \frac{2B}{1} (l^2 n^2 \pi^2 a \sin wt - l^4 w \cos wt) \cdot \right. \\
 & \cdot \int_0^1 \sin \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) \frac{1}{\xi + \alpha} d\xi - 2an\pi \{ (-A_1 + (-1)^n \frac{1}{2} \sqrt{3} A_2) (n^2 \pi^2 a \cos wt + l^2 w \sin wt) \\
 & \left. + (-1)^n \frac{1}{2} A_2 (n^2 \pi^2 a \sin wt - l^2 w \cos wt) \} + \frac{2}{n\pi} (n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2) (B_1 - (-1)^n B_2) \right]
 \end{aligned}$$

### § 7 Numerieke bewerking

Om een concreet beeld van de oplossing te verkrijgen kennen we de constanten een oceanografisch verantwoorde waarde toe, en beschouwen het temperatuurverloop vanaf een punt dichtbij de kust tot 30 km van de kust verwijderd; dit wordt gedaan voor 12 tijdstippen met onderlinge afstand van een maand. Aan de constanten kennen we de volgende waarden toe:  $a = 100$ ;  $l = 30000$ ;  $B = 25 \cdot 10^{-3}$ ;  $A_1 = 8$ ;  $A_2 = 6$ ;  $\alpha = 100$ ;  $B_1 = B_2 = 11$ ;

De oplossing (54) is een oneindige reeks van het type  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ , waarin  $A_N = \sum_{n=1}^N a_n$  een begrensde waarde heeft en  $b_n$  monotoon naar nul gaat. Dergelijke

reeksen zijn volgens de stelling van Abel convergent.

Aangezien de graad van de noemer 4 en die van de teller 3 is, is te verwachten dat de convergentie zeer langzaam. Dit bleek inderdaad het geval te zijn. De som werd berekend voor één x en één t en bleek met uitdempende amplitude te oscilleren rond een limiet-waarde. Pas na 1000 termen was de oscillatie binnen de gewenste nauwkeurigheid van 0.1 graad Celsius.

Ter versnelling van de convergentie werd de volgende procedure toegepast. De reeks (54) werd als volgt in stukken gesplitst:

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{1}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} \left\{ -\frac{2B}{l} (l^2 n^2 \pi^2 a \sin wt - l^4 w \cos wt) \right. \\
 & \cdot \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \cdot \frac{1}{\xi + \alpha} d\xi - 2an\pi l^2 w \sin wt (-A_1 + (-1)^n \frac{1}{2} \sqrt{3} A_2) + \\
 & \left. (-1)^n \cdot A_2 \cdot an\pi l^2 w \cos wt \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{2a^2 n^3 \pi^3 A_1 \cos wt}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot \frac{-2a^2 n^3 \pi^3 \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot A_2 \cos wt \cdot (-1)^n}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{-a^2 n^3 \pi^3 A_2 \sin wt \cdot (-1)^n}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (11 - (-1)^n \cdot 11) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
 \end{aligned}$$

De eerste reeks van (55) convergeert vrij snel aangezien de graad van de noemer die van de teller met 2 overtreft. Substitutie van een willekeurige x en t leverde voor de tiende term + 0.00023 °C op, zodat de som van de eerste tien termen reeds een goede benadering van de limiet was.

De tweede reeks werd als volgt berekend:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \frac{2a^2 n^3 \pi^3 A_1 \cos wt}{n^4 \pi^4 a^2 + l^4 w^2} = \frac{2A_1 \cos wt}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \cdot \frac{n^3}{n^4 + \frac{l^4 w^2}{a^2 \pi}}$$



$$= \frac{2A_1 \cos wt}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) - \frac{2A_1 \cos wt}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \frac{\frac{l^4 w^2}{a^2 \pi}}{n(n^4 + \frac{l^4 w^2}{a^2 \pi})}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right)$  is een analytisch te berekenen reeks

voor  $0 < \frac{\pi x}{l} < 2\pi$  en geeft als resultaat  $\frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi x}{l})$ , terwijl de tweede reeks van het rechter lid zeer snel convergeert wegens de factor  $n^5$  in de noemer.

De derde en vierde reeks werden analoog berekend; hier werd gebruik gemaakt van het feit dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi x}{l} \quad \text{voor} \quad -\pi < \frac{\pi x}{l} < +\pi$$

Tenslotte geeft de laatste reeks voor  $0 < \frac{\pi x}{l} < \pi$  als uitkomst 11.

Met behulp van de computer werd nu de temperatuur berekend als functie van de afstand tot de kust gedurende een jaar.

Het resultaat is in een grafiek weergegeven (zie onder).

De nummers van de maanden corresponderen niet met de gebruikelijke volgorde januari, februari enz.

Voor de maanden 1 tot 6 treedt er een maximum op dat naar rechts verschuift; voor de maanden 7 tot 12 een eveneens naar rechts verschuivend minimum.

De maanden 1 tot en met 6 corresponderen met de maanden dat de temperatuur van de atmosfeer afneemt, 7 tot en met 12 met de maanden dat de temperatuur toeneemt.

Dicht bij de kust blijkt de gradient het grootst te zijn.

#### Literatuur:

- (1) Bremekamp: Partiële differentiaalvergelijkingen.
- (2) Handboek der Wiskunde.
- (3) Carslaw and Jaeger: Conduction of heat in solids.

